

Chapitre I : Les critères de fatigue multiaxiaux

Depuis près de six ans, un partenariat étroit entre le LEDEPP (Laboratoire d'Etudes et de Développement des Produits Plats) de SOLLAC et l'INSA a pour objectif le développement d'une méthode de prévision de durée de vie à l'amorçage d'une fissure macroscopique, sous chargement quelconque. Dans un tel contexte, l'utilisation des critères de fatigue multiaxiaux représente une étape incontournable. Le chargement le plus complexe auquel la matière peut être soumise correspond à un chargement multiaxial d'amplitude variable que l'on qualifie communément de multiaxial aléatoire, sans pour autant lui associer forcément un caractère statistique. En fatigue à grand nombre de cycles, les critères multiaxiaux sont les outils permettant de rendre compte du caractère multiaxial des sollicitations. L'objectif de ce chapitre est donc de référencer le plus grand nombre de critères de fatigue multiaxiaux afin dans un premier temps d'en créer une banque de données, et dans un second temps de les valider à l'aide d'une autre banque de données, d'essais multiaxiaux cette fois-ci.

I.1 Formalisme général d'un critère de fatigue

Au même titre qu'un critère de résistance (tel que celui de Rankine, de Tresca ou de Von Mises) permet de statuer sur le dépassement de la limite d'élasticité d'un matériau soumis à un état de contrainte multiaxial, un critère de fatigue multiaxial permet de savoir si la limite d'endurance ou plus généralement la limite de fatigue à N cycles du matériau est atteinte pour une succession d'états de contraintes définissant un cycle multiaxial. Un critère de fatigue est cependant plus complexe qu'un critère de résistance du fait du caractère variable des contraintes au cours du cycle, particularité à l'origine du phénomène de fatigue.

Un critère de fatigue met en relation des grandeurs issues du cycle multiaxial de contraintes $[\sigma_{ij}(t)]_T$ définies sur la période T (amplitudes, valeurs moyennes, valeurs maximales, parties alternées) et des limites d'endurance (ou des limites de fatigue à N cycles) suivant plusieurs modes de sollicitations simples (traction alternée symétrique σ_{-1} , flexion alternée symétrique f_{-1} , traction répétée σ_0 , flexion répétée f_0 , torsion alternée symétrique τ_{-1} , ...). Un critère de fatigue peut donc être représenté à l'aide d'une fonction de fatigue dans laquelle interviennent le cycle multiaxial de contraintes et plusieurs limites d'endurance ou limites de fatigue du matériau. Cette fonction de fatigue est prise égale à l'unité lorsque la limite d'endurance ou la limite de fatigue du matériau est atteinte :

$$E([\sigma_{ij}(t)]_T, \sigma_{-1}, f_{-1}, \sigma_0, f_0, \tau_{-1}, \dots) = 1 \quad (I.1)$$

Un critère de fatigue, par l'intermédiaire de la valeur de sa fonction de fatigue, situe ainsi tout cycle multiaxial de contraintes $[\sigma_{ij}(t)]_T$ par rapport à la limite d'endurance ou à la limite de fatigue du matériau. Il traduit donc par la valeur de la fonction E le caractère plus ou moins endommageant du cycle de contraintes appliqué. Pour un cycle multiaxial donné, si celle-ci est inférieure à l'unité ($E < 1$), le critère prévoit l'amorçage d'une fissure au delà du nombre N de cycles définissant l'endurance ou la limite de fatigue du matériau. Si la fonction de fatigue est supérieure à l'unité ($E > 1$), le critère prévoit au contraire l'apparition d'une fissure avant l'application des N cycles correspondant au seuil d'endurance ou à la limite de fatigue. Enfin, et par définition, lorsque la fonction de fatigue est égale à l'unité, la durée de vie du matériau soumis au cycle multiaxial considéré coïncide avec la durée de vie (N cycles) du matériau correspondant aux limites d'endurance ou aux limites de fatigue utilisées pour le calcul de E.

I.2 Formalisme et classification des critères de fatigue multiaxiaux

Une étude bibliographique a permis de recenser 37 critères de fatigue qui constituent la base de données. L'ensemble des critères sont répartis en trois approches distinctes qui se différencient par leur concept.

La première approche, dite empirique, regroupe les critères dont le formalisme est issu de résultats expérimentaux obtenus pour un type de sollicitations multiaxiales et un matériau donnés.

La deuxième approche porte le nom d'approche globale. Elle réunit entre autres les critères où interviennent des invariants du tenseur des contraintes ou de son déviateur. Ces quantités représentant l'ensemble des contraintes sous un scalaire confèrent aux critères qui les mettent en œuvre un caractère global. Certains critères définissent des grandeurs liées à l'ensemble des plans physiques possibles passant par le point où l'étude en fatigue est conduite pour ensuite en faire une moyenne, quadratique en général. Cette dernière assure aussi aux critères basés sur ce principe un aspect global. Une dernière sous-catégorie peut être citée. Il s'agit des formalismes basés sur des énergies.

La troisième approche, de type plan critique, rassemble les critères dont le formalisme est basé sur la recherche d'un plan physique critique. L'endommagement du matériau par fatigue, au point où sont connues les contraintes, est lié à leur action sur le plan en question.

Parmi ces trois approches, des sous-groupes différencient les formalismes des critères. On distingue les critères macroscopiques faisant intervenir des contraintes évaluées à l'échelle macroscopique. Le choix des termes de contraintes intervenant dans la définition de tels critères est justifié par leur auteur. D'autres critères sont basés sur le comportement de la matière à l'échelle microscopique. Ils sont dits microscopiques bien que leur formalisme final utilise des grandeurs macroscopiques.

La figure I.1 récapitule l'ensemble des critères multiaxiaux de fatigue répertoriés dans la littérature ainsi que leur classification.

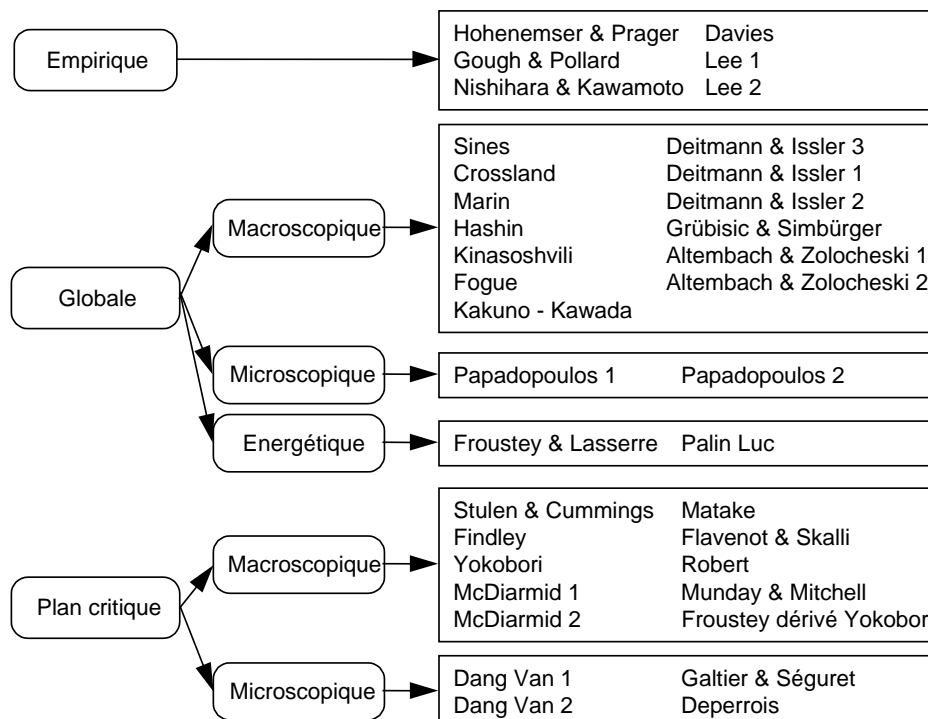


Figure I.1. Ensemble des critères multiaxiaux de fatigue et leur classification.

I.2.1 Les critères d'approche empirique

Cette catégorie regroupe six critères. Ils sont issus de résultats expérimentaux obtenus généralement pour un type de sollicitations multiaxiales déterminé. Il s'agit habituellement de traction-torsion ou de flexion-torsion, le plus souvent en phase. On retrouve parmi ces critères les plus anciennes modélisations, celles de Hohenemser & Prager [1] et de Gough & Pollard [2,3] qui ont été élaborées en 1933 et 1935 respectivement. Les modèles les plus récents proposés par Lee datent de 1980 [4,5] et de 1989 [6,7].

I.2.1.1 Nomenclature

Pour définir leur fonction de fatigue, ces critères utilisent les amplitudes et les valeurs moyennes des composantes du tenseur des contraintes des sollicitations considérées séparément (traction, flexion, torsion), ainsi que des limites d'endurance pour différentes sollicitations simples telles que la traction, la flexion ou la torsion. Certaines formulations utilisent la résistance maximale à la traction ou au cisaillement.

- σ_a : amplitude de la contrainte de traction
- f_a : amplitude de la contrainte de flexion
- τ_a : amplitude de la contrainte de cisaillement (torsion)
- σ_m : contrainte moyenne de traction
- f_m : contrainte moyenne de flexion
- τ_m : contrainte moyenne de cisaillement (torsion)
- σ_{-1} : limite d'endurance en traction alternée symétrique
- f_{-1} : limite d'endurance en flexion alternée symétrique
- τ_{-1} : limite d'endurance en torsion alternée symétrique
- R_m : résistance maximale de traction
- τ_u : résistance maximale au cisaillement

I.2.1.2 Le critère de Hohenemser & Prager [1]

Le critère de Hohenemser & Prager est le premier critère recensé. Etabli en 1933, il a été obtenu à partir d'essais de traction-torsion où le cisaillement est variable et la contrainte normale de traction σ_m statique.

$$E_{HP} = \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}} \right)^2 + \frac{\sigma_m}{R_m} \quad (1.2)$$

I.2.1.3 Le critère de Gough & Pollard [2,3]

A partir de nombreux essais de flexion-torsion en phase, Gough & Pollard ont défini en 1935 deux formulations qui représentent, dans le repère lié aux amplitudes de la contrainte normale de flexion et de la contrainte de cisaillement, des ellipses. La première expression, donnée ci-dessous, est destinée aux matériaux ductiles :

$$E_{GP} = \left(\frac{f_a}{f_{-1}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}} \right)^2 \quad (1.3)$$

La seconde formulation, fait intervenir les mêmes quantités que précédemment, mais est adaptée aux matériaux fragiles. La fonction de fatigue est la suivante :

$$E_{GP} = \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}} \right)^2 + \left(\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} - 1 \right) \left(\frac{f_a}{f_{-1}} \right)^2 + \left(2 - \frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} \right) \left(\frac{f_a}{f_{-1}} \right) \quad (1.4)$$

I.2.1.4 Le critère de Davies [8]

Davies, en 1935, adopte une formulation semblable à celle de Hohenemser & Prager. Il ne modélise plus l'évolution de l'amplitude du cisaillement admissible en fonction d'une contrainte normale statique σ_m mais l'inverse, c'est à dire qu'il observe l'amplitude de la contrainte normale de flexion admissible en fonction d'une contrainte de cisaillement statique τ_m . Il construit à partir de ses observations la modélisation suivante :

$$E_{DA} = \left(\frac{f_a}{f_{-1}} \right)^2 + \frac{\tau_m}{\tau_u} \quad (1.5)$$

I.2.1.5 Le critère de Nishihara & Kawamoto [9,10]

En 1941, Nishihara & Kawamoto proposent deux modèles issus de leurs constatations expérimentales qui se distinguent par la valeur du ratio f_{-1}/τ_{-1} entre la limite d'endurance en flexion alternée symétrique et la limite d'endurance en torsion alternée symétrique. Les deux modèles s'écrivent :

$$E_{NK} = \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}} \right)^2 + \left(\frac{f_a}{f_{-1}} \right)^2 \quad \text{si } \frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} \geq \sqrt{3} \quad (1.6)$$

$$E_{NK} = \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(3 - \left(\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} \right)^2 \right) \frac{f_a}{f_{-1}} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} \right)^2 - 1 \right) \left(\frac{f_a}{f_{-1}} \right)^2 \quad \text{si } \frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} \leq \sqrt{3} \quad (1.7)$$

I.2.1.6 Le critère de Lee 1 [4,5]

Plus récemment, en 1980, Lee propose une modélisation issue d'essais de flexion-torsion hors phase. Il introduit un exposant α dépendant du déphasage ϕ entre les deux

sollicitations et défini par $\alpha = 2(1 + \beta \sin \phi)$, où β est une constante liée au matériau. Le critère est donné par la relation suivante :

$$E_{LEE1} = f_a \left[1 + \left(\frac{\tau_a f_{-1}}{f_a \tau_{-1}} \right)^\alpha \right]^{1/\alpha} \quad (1.8)$$

I.2.1.7 Le critère de Lee 2 [6,7]

En 1989, Lee a modifié son premier critère empirique afin d'y ajouter l'influence d'une flexion moyenne. Son dernier critère fait intervenir un exposant n , compris entre 1 et 2, qui représente une constante empirique :

$$E_{LEE2} = \frac{E_{LEE1}}{\left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m} \right)^n \right]} = \frac{f_a \left[1 + \left(\frac{\tau_a f_{-1}}{f_a \tau_{-1}} \right)^\alpha \right]^{1/\alpha}}{\left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m} \right)^n \right]} \quad (1.9)$$

I.2.1.8 Conclusion

Les critères de fatigue empiriques modélisent de façon précise un ensemble de résultats expérimentaux obtenus pour des sollicitations multiaxiales particulières. Il s'agit toujours de traction ou de flexion combinée à de la torsion. L'intérêt de ces modèles est d'offrir pour des cas de chargement particuliers une bonne représentation du domaine limite d'endurance ($E=1$), pour un grand nombre de matériaux. Mais bien qu'ayant un caractère multiaxial, ils sont restreints aux modes de sollicitations pour lesquels ils ont été élaborés car leur formalisme est spécifiquement lié au type d'états de contraintes rencontrés pour ces sollicitations et ne revêt donc pas un caractère général lui permettant de traiter tout cycle multiaxial.

On ne peut donc pas retenir ces critères de fatigue pour traiter n'importe quel cycle de contrainte car ils ne sont pas adaptés à une forme quelconque de tenseur de contrainte périodique, tenseur que la matière est susceptible de rencontrer. Par conséquent aucune validation avec l'ensemble de la banque de données d'essais n'est réalisable.

I.2.2 Les critères de type plan critique

Cette famille regroupe 14 critères de fatigue élaborés de 1954 à nos jours. Leurs auteurs considèrent que l'endommagement de la matière est localisé sur un plan dit critique qui dépend du cycle multiaxial considéré. La définition du plan critique supposé voir apparaître la fissure est basée sur le choix de paramètres des contraintes s'exerçant sur ce plan et de paramètres issus des invariants du tenseur des contraintes ou de son déviateur. L'observation du comportement expérimental en fatigue des matériaux métalliques est bien souvent à l'origine du choix opéré par les différents auteurs.

I.2.2.1 Nomenclature

Les termes de contraintes intervenant dans les critères de fatigue de type plan critique sont principalement les composantes normales et tangentielles des contraintes agissant sur un plan physique de normale h au cours du cycle multiaxial considéré. Celles-ci sont obtenues par projection des états de contraintes sur le plan et sur sa normale. A l'instant t , le tenseur de contrainte $[\sigma(t)]$ agit sur le plan de normale h par le biais de son vecteur contrainte $\phi_h(t)$ défini par :

$$\phi_h(t) = [\sigma(t)]h \quad (I.10)$$

Le vecteur contrainte $\phi_h(t)$ se décompose ensuite en une contrainte normale $\sigma_{hh}(t)$ et une contrainte tangentielle $\tau_h(t)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{hh}(t) &= h[\sigma(t)]h \\ \tau_h(t) &= \sqrt{\sigma_{uh}^2(t) + \sigma_{vh}^2(t)} \end{aligned} \quad (I.11)$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma_{uh}(t) &= u[\sigma(t)]h \\ \sigma_{vh}(t) &= v[\sigma(t)]h \end{aligned} \quad (I.12)$$

où (u, v, h) est le repère lié au plan physique.

La figure I.2 donne une représentation de la décomposition du vecteur contrainte $\phi_h(t)$ sur le plan physique (π) de normale h passant par le point P à l'instant t . Le repère lié à la matière et dans lequel sont exprimées les contraintes est $(1, 2, 3)$.

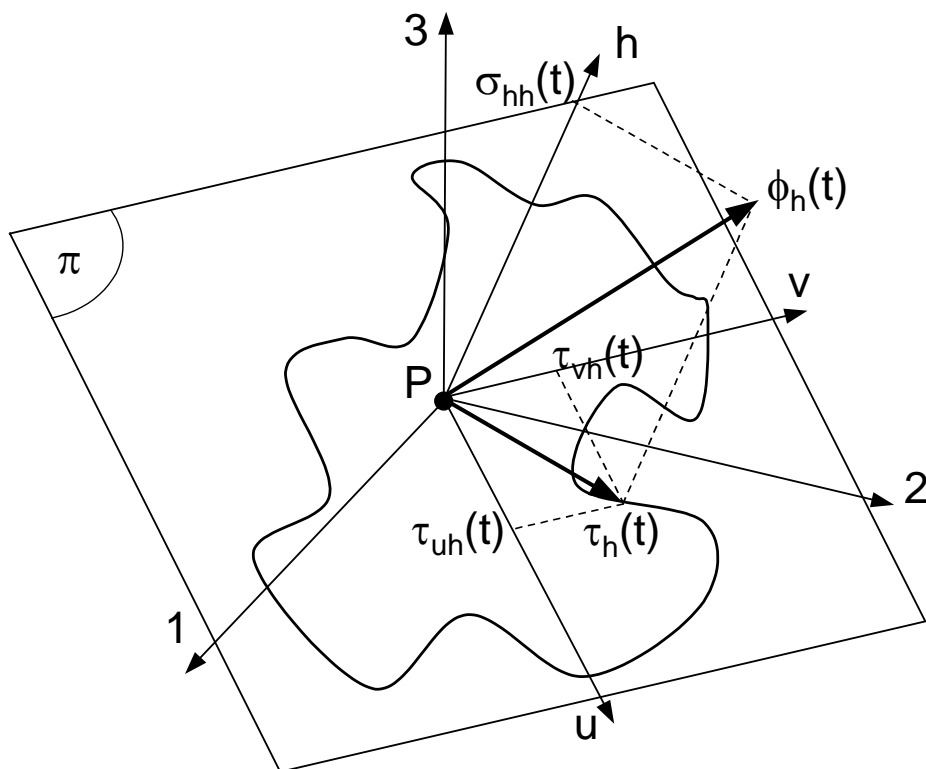


Figure I.2. Décomposition du vecteur contrainte $\phi_h(t)$ dans le repère (u, v, h) lié au plan physique de normale h .

a) Les termes relatifs aux contraintes normales

Les différents critères utilisent plusieurs quantités issues de l'évolution de la contrainte normale au plan physique $\sigma_{hh}(t)$ au cours du cycle :

- σ_{hhmin} : contrainte normale minimale
- σ_{hhmax} : contrainte normale maximale
- σ_{hha} : amplitude de la contrainte normale
- $\sigma_{hha}(t)$: partie alternée de la contrainte normale à l'instant t
- σ_{hhm} : contrainte normale moyenne

Ces différentes quantités sont liées par les relations suivantes :

$$\sigma_{hhm} = \frac{\sigma_{hhmax} + \sigma_{hhmin}}{2} \quad (I.13)$$

$$\sigma_{hha} = \frac{\sigma_{hhmax} - \sigma_{hhmin}}{2} \quad (I.14)$$

$$\sigma_{hha}(t) = \sigma_{hh}(t) - \sigma_{hhm} \quad (I.15)$$

La figure I.3 illustre ces trois valeurs définies au cours de l'évolution de la contrainte normale $\sigma_{hh}(t)$.

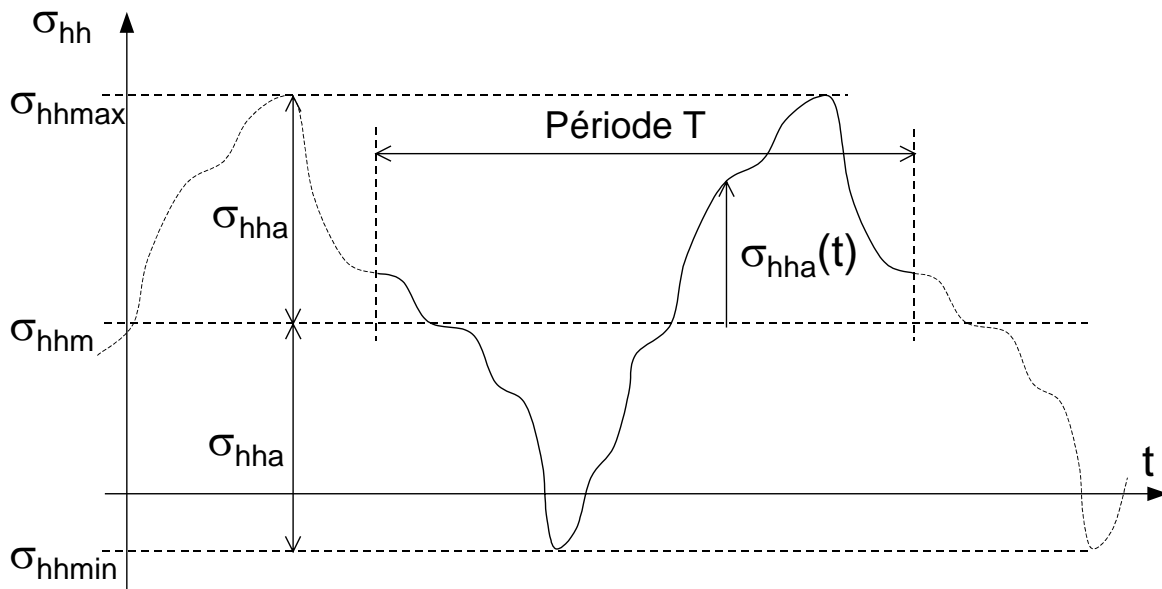


Figure I.3. Définition des différents termes liés à la contrainte normale $\sigma_{hh}(t)$.

b) Les termes relatifs aux contraintes tangentielles

Les termes associés à l'évolution de la contrainte tangentielle au cours du cycle sont similaires dans leur principe de définition à ceux de la contrainte normale. Cependant leur détermination est plus complexe du fait du caractère bidimensionnel de la contrainte tangentielle. La détermination de l'amplitude, de la partie alternée et de la valeur moyenne de la contrainte tangentielle nécessite la construction du plus petit cercle circonscrit au trajet de charge [11], lequel est constitué par l'extrémité du vecteur contrainte de cisaillement $\tau_h(t)$ sur le plan physique (figure I.4) au cours du cycle. Par commodité d'écriture, toutes les notations des différents termes des contraintes tangentielles représentent des vecteurs sur la figure I.4 et leur norme lorsqu'elles sont utilisées dans les formulations des critères.

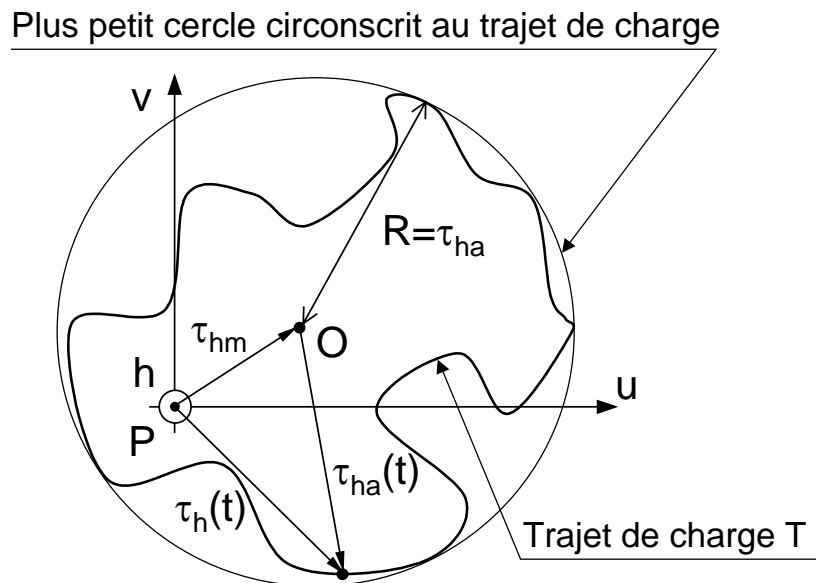


Figure I.4. Définition des différents termes relatifs à la contrainte tangentielle $\tau_h(t)$.

Les trois termes issus de la contrainte tangentielle sont définis par :

- τ_{ha} : amplitude de la contrainte tangentielle (rayon du plus petit cercle circonscrit au trajet de charge)
- τ_{hm} : contrainte tangentielle moyenne (vecteur PO sur la figure I.4)
- $\tau_{ha}(t)$: partie alternée de la contrainte tangentielle à l'instant t (définie vectoriellement par $\tau_{ha}(t) = \tau_h(t) - \tau_{hm}$)

I.2.2.2 Le critère de Stulen & Cummings [12]

Défini en 1954, le critère de Stulen & Cummings recherche le plan critique en balayant tous les plans possibles afin de trouver celui où la quantité E_h ci-dessous est maximale :

$$E_h = \frac{\tau_{ha}}{\beta - \alpha \sigma_{hh \max}} \tag{I.16}$$

La fonction de fatigue du critère s'obtient, sur le plan critique, de la façon suivante :

$$E_{SC} = \frac{\tau_{ha} + \alpha\sigma_{hhmax}}{\beta} \quad (I.17)$$

Le critère s'écrit $E_{SC} = 1$ lorsque la limite de fatigue du matériau est atteinte. Les deux constantes α et β sont déterminées (calage du critère) à partir de deux limites de fatigue σ_{-1} et τ_{-1} du matériau respectivement en traction et en torsion alternées symétriques, en écrivant que le critère est validé ($E_{SC} = 1$) pour ces deux limites de fatigue. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - 1 \\ \beta &= \tau_{-1} \end{aligned} \quad (I.18)$$

Le domaine de validité du critère est obtenu par la condition $\alpha > 0$ (contribution effective au dommage par fatigue de la contrainte normale), c'est à dire par $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}$.

I.2.2.3 Le critère de Findley [13]

Le critère de Findley établi en 1957 est semblable à celui de Stulen & Cummings. Il s'en différencie par le choix du plan critique, obtenu en recherchant le plan où la combinaison linéaire $\tau_{ha} + \alpha\sigma_{hhmax}$ est maximale. Le critère s'écrit :

$$E_{FD} = \frac{\tau_{ha} + \alpha\sigma_{hhmax}}{\beta} \quad (I.19)$$

Les constantes α et β et le domaine de validité du critère sont identiques à ceux du critère de Stulen & Cummings.

I.2.2.4 Le critère de Yokobori [14]

Yokobori propose en 1966 la première formulation où la définition du plan critique est directement liée à l'expression du critère : on définit alors un indicateur d'endommagement par plan E_h dont la maximisation par rapport à h (normale au plan physique) constitue la recherche du plan critique. L'indicateur d'endommagement E_h s'écrit :

$$E_h = \frac{\text{Max}_t(\tau_h(t)) + \alpha\sigma_{hhmax}}{\beta} \quad (I.20)$$

Le critère s'écrit alors :

$$E_{YK} = \text{Max}_h(E_h) \quad (I.21)$$

Le calage du critère, à l'aide de deux limites de fatigue (σ_{-1} et τ_{-1} , avec $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}$), conduit à des constantes α et β identiques à celles des critères de Stulen & Cummings et de Findley.

$$\alpha = 2 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - 1 \quad (I.22)$$

$$\beta = \tau_{-1}$$

I.2.2.5 Le critère de McDiarmid 1 [15]

La première version du critère de McDiarmid date de 1973. Le plan critique est défini comme celui où l'amplitude du cisaillement τ_{ha} est maximale. Sur ce plan, la fonction de fatigue du critère est donnée par :

$$E_{MD1} = \frac{\tau_{ha} + B(\sigma_{hha})^{3/2}}{A} \quad (I.23)$$

Les deux constantes A et B sont déterminées en vérifiant le critère ($E_{MD1} = 1$) pour deux limites de fatigue du matériau en traction et en torsion alternées symétriques (σ_{-1} et τ_{-1}). On obtient :

$$A = \tau_{-1}$$

$$B = \frac{\tau_{-1} - \frac{\sigma_{-1}}{2}}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{2}\right)^{3/2}} \quad (I.24)$$

Le critère est valide sous respect de la condition : $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}$.

Il est à noter que ce critère ne prend pas en compte les contraintes moyennes du cycle des contraintes alors que les deux critères précédents traitent sur un plan d'égalité les parties moyennes et alternées de la contrainte normale.

I.2.2.6 Critère de Mc Diarmid 2 [16]

McDiarmid donne une seconde version de son critère en 1974 dans laquelle il introduit l'influence de la contrainte normale moyenne dans un facteur de l'amplitude du cisaillement du plan critique. La définition du plan critique reste quant à elle inchangée (plan d'amplitude de cisaillement maximale). La fonction de fatigue du second critère de McDiarmid s'écrit :

$$E_{MD2} = \frac{\left(1 - \frac{2\sigma_{hhm}}{R_m}\right)^{-1/2} \tau_{ha} + B(\sigma_{hha})^{3/2}}{A} \quad (I.25)$$

où R_m est la résistance maximale à la traction du matériau.

Les constantes A et B du critère sont identiques à celles de la première version du critère. La validité du critère impose deux conditions à respecter : $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}$ et $\frac{\sigma_{hhm}}{R_m} < \frac{1}{2}$.

I.2.2.7 Le critère de Dang Van 1 [17,18]

Le critère de Dang Van, dans sa première version (1973), est le premier critère de fatigue à avoir été introduit dans l'industrie française (PSA). Justifié par des considérations établies à l'échelle microscopique, le critère utilise des grandeurs macroscopiques des contraintes qui sont la partie alternée du cisaillement et la pression hydrostatique. Comme pour le critère de Yokobori, la fonction de fatigue est une maximisation d'un indicateur de dommage par plan E_h défini par :

$$E_h = \text{Max}_t \left\{ \frac{\tau_{ha}(t) + \alpha P_H(t)}{\beta} \right\} \quad (1.26)$$

avec :

$$P_H(t) = \frac{\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t) + \sigma_{33}(t)}{3} \quad (1.27)$$

La fonction de fatigue du critère s'écrit alors :

$$E_{DV1} = \text{Max}_h(E_h) \quad (1.28)$$

Par définition, la fonction de fatigue du critère est égale à l'unité à la limite de fatigue du matériau, en particulier pour les limites de fatigue en traction et en torsion alternées symétriques qui servent au calage du critère. Les constantes α et β ainsi établies sont données par :

$$\alpha = 3 \left(\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \quad (1.29)$$

$$\beta = \tau_{-1}$$

La condition de validité du critère de Dang Van 1 est réalisée lorsque $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}$.

I.2.2.8 Le critère de Matake [19,20]

En 1977, Matake formule un critère semblable à ceux de Stulen & Cummings et de Findley. Il ne s'en différencie que par le choix du plan critique, celui où l'amplitude du cisaillement τ_{ha} est maximale. La fonction de fatigue sur ce plan critique s'écrit :

$$E_{MT} = \frac{\tau_{ha} + \alpha \sigma_{hh\max}}{\beta} \quad (1.30)$$

Les constantes α et β et la condition de validité du critère sont identiques à celles des critères de Stulen & Cummings et de Findley.

I.2.2.9 Le critère de Flavenot & Skalli [21,22]

Flavenot et Skalli introduisent en 1982 la notion de couche critique. Ils conservent la formulation du critère de Dang Van 1 et l'appliquent à l'état de contraintes multiaxial existant dans une couche critique située à une faible distance (quelques grains) de la surface libre.

Le formalisme du critère, ses constantes et son domaine de validité sont donc ceux du critère de Dang Van 1.

$$E_{h(\text{couche critique})} = \text{Max}_t \left\{ \frac{\tau_{ha}(t) + \alpha P_H(t)}{\beta} \right\} \quad (I.31)$$

$$E_{FS} = \text{Max}_{h(\text{couche critique})} (E_{h(\text{couche critique})}) \quad (I.32)$$

I.2.2.10 Le critère de Dang Van 2 [23]

Dang Van, Griveau et Message proposent une nouvelle version du critère de Dang Van en 1989. L'objectif de cette version est d'accélérer les calculs en évitant de balayer l'ensemble des plans physiques pour la détermination du plan critique. Dans l'espace du tenseur déviateur des contraintes $[s_{ij}(t)]$, un algorithme permet de définir la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de charge décrit au cours d'un cycle multiaxial, la notion de distance dans l'espace à 6 dimensions du tenseur déviateur des contraintes étant établie à l'aide du second invariant J_2 . Le trajet de charge désigne ici l'ensemble des états de contraintes (dans l'espace des déviateurs) du cycle considéré. Le centre de l'hypersphère constitue l'état moyen du tenseur déviateur $[s_{ijm}]$ pour le cycle considéré et le tenseur déviateur alterné est défini par $[s_{ija}(t)] = [s_{ij}(t)] - [s_{ijm}]$. Les auteurs utilisent ensuite le critère de Tresca, appliqué aux valeurs principales des parties alternées du tenseur déviateur $[s_{ija}(t)]$, afin d'en déduire le cisaillement maximal alterné. Il s'agit là d'une propriété du tricerclé de Mohr : la plus grande des demi-différences entre deux quelconques contraintes principales ou entre deux valeurs principales du tenseur déviateur des contraintes, prise en valeur absolue, est égale au cisaillement maximal dû à l'état de contrainte. Le critère de Dang Van 2 est identique à la première version quant aux résultats obtenus (fonction de fatigue). La détermination de l'hypersphère circonscrite au trajet de charge conduit à la même amplitude de cisaillement que celle obtenue avec le plus petit cercle circonscrit.

$$E_{DV2} = \text{Max}_t \frac{\tau_{pr}(t) + \alpha P_H(t)}{\beta} \quad (I.33)$$

avec :

$$\tau_{pr}(t) = \frac{1}{2} \text{Max}(|s_{Ia}(t) - s_{IIa}(t)|, |s_{IIa}(t) - s_{IIIa}(t)|, |s_{IIIa}(t) - s_{Ia}(t)|) \quad (I.34)$$

où $s_{Ia}(t)$, $s_{IIa}(t)$ et $s_{IIIa}(t)$ sont les valeurs principales du tenseur déviateur alterné $[s_{ija}(t)]$ à l'instant t .

Les deux constantes α et β ainsi que le domaine de validité $(\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2})$ restent inchangés pour le critère, par rapport au critère Dang Van 1.

I.2.2.11 Le critère de Froustey dérivé Yokobori [24]

Le critère proposé par Froustey en 1987 est une variante du critère de Yokobori. L'auteur apporte une modification à l'expression de l'indicateur de dommage par plan E_h .

Elle remplace le cisaillement maximal, $\text{Max}_t(\tau_h(t))$, par l'amplitude τ_{ha} de ce même cisaillement. Dès lors le formalisme du critère devient similaire à celui du critère de Findley (cf. paragraphe I.2.2.3).

I.2.2.12 Le critère de Munday & Mitchell [7,25]

Munday & Mitchell proposent leur critère en 1989. Dans un premier temps, ils identifient le plan critique comme étant celui où le cisaillement est maximal, c'est à dire de la façon suivante : $\text{Max}_t(\tau_h(t))$.

Dans un second temps, ils expriment la fonction de fatigue de leur critère sur le plan critique en s'inspirant de l'ellipse de Gough et Pollard. Les amplitudes des contraintes normale et tangentielle sont respectivement comparées aux limites de fatigue en flexion et en torsion alternées symétriques.

$$E_{MM} = \left(\frac{\sigma_{hha}}{f_{-1}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{ha}}{\tau_{-1}} \right)^2 \quad (I.35)$$

Ce critère ne prend donc pas en compte l'influence d'une contrainte moyenne si ce n'est dans certains cas dans la détermination du plan critique.

I.2.2.13 Le critère de Galtier & Séguret [26,27]

Galtier & Séguret définissent en 1990 un critère multiaxial de fatigue dont la représentation est une demi-ellipse dans un repère (X_1, X_2) . L'équation de cette ellipse est donnée par la relation suivante :

$$E_{GS} = \frac{(X_1 + c)^2}{\left(\frac{R_m}{3} + c \right)^2} + \frac{X_2^2}{b^2} \quad (I.36)$$

Les variables X_1 et X_2 sont définies de la façon suivante :

$$X_1 = \text{Max}_t \{ P_H(t) \} \cdot \left\{ 1 - \alpha \left(\frac{d^\circ T}{\text{traction}} - \text{Max}_t \left[\frac{d^\circ T}{\text{cycle}} \right] \right) \right\} \quad (I.37)$$

$$X_2 = \text{Max}_t \{ P_e(h) \} \quad (I.38)$$

où $P_H(t)$ est la pression hydrostatique à l'instant t , $P_e(h)$ est le périmètre du trajet de charge sur le plan physique de normale h (lequel est une ellipse lorsque les sollicitations multiaxiales sont à évolution sinusoïdales et toutes de même période).

$d^\circ T(t)$ est le degré de triaxialité de De Leiris, exprimé par :

$$d^\circ T(t) = \frac{I_1^2(t)}{I_1^2(t) + \frac{6(1+\nu)}{1-2\nu} J_2(t)} \quad (I.39)$$

avec :

- ν : coefficient de Poisson du matériau,
- $I_1(t)$: premier invariant du tenseur des contraintes à l'instant t ,
- $J_2(t)$: deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes à l'instant t .

Les trois constantes à déterminer sont b , c et α . Les deux premières sont identifiées à l'aide des limites de fatigue en traction et en torsion alternées symétriques σ_{-1} et τ_{-1} . Un essai multiaxial, dont le degré de triaxialité est différent de celui obtenu pour l'essai de traction simple ($\text{Max}[d^{\circ}T(t)] \neq d^{\circ}T_{\text{traction}} = \frac{1-2\nu}{3}$), est nécessaire pour déterminer le coefficient α d'ajustement de l'influence de la triaxialité.

Les conditions de validité sont identiques lors du calage du critère. L'existence de c est assurée si : $4\tau_{-1}^2\sigma_{-1} \neq R_m(4\tau_{-1}^2 - \sigma_{-1}^2)$. Le calcul de b n'est possible que si : $c > -\frac{R_m}{6}$. Ces conditions étant vérifiées, les constantes b et c s'écrivent :

$$c = \frac{R_m^2(4\tau_{-1}^2 - \sigma_{-1}^2) - 4\tau_{-1}^2\sigma_{-1}^2}{6(R_m(\sigma_{-1}^2 - 4\tau_{-1}^2) + 4\tau_{-1}^2\sigma_{-1})}$$

$$b = \frac{4\tau_{-1}\left(\frac{R_m}{3} + c\right)}{\sqrt{\frac{R_m}{3}\left(\frac{R_m}{3} + 2c\right)}} \quad (1.40)$$

Enfin, la dernière constante α dépend de l'essai choisi pour le calage.

I.2.2.14 Le critère de Deperrois [28]

Formulé en 1991, le critère de Deperrois est basé sur les mêmes théories que celles utilisées par Dang Van pour la justification des termes utilisés. Il considère, du point de vue macroscopique, les plus grandes cordes D_1 , D_2 , D_3 , D_4 et D_5 du trajet de chargement ψ issues de projections successives dans l'espace du tenseur déviateur des contraintes. Ces cordes sont définies de la manière suivante :

- D_1 est la longueur de la plus grande corde du trajet de chargement ψ dans l'espace du tenseur déviateur des contraintes,
- D_2 est la longueur de la plus grande corde du trajet de chargement ψ projeté sur l'hyperplan perpendiculaire à la direction selon laquelle a été mesurée D_1 ,
- D_3 est la longueur de la plus grande corde du trajet de chargement ψ projeté sur l'hyperplan perpendiculaire aux directions ayant permis de mesurer D_1 et D_2 ,
- D_4 est la longueur de la plus grande corde du trajet de chargement ψ projeté dans l'hyperplan perpendiculaire aux directions de mesure de D_1 , D_2 et D_3 ,
- D_5 est la longueur de la plus grande corde du trajet de chargement ψ projeté dans l'hyperplan perpendiculaire aux directions de mesure de D_1 , D_2 , D_3 et D_4 .

A chaque projection, l'hyperplan perd une dimension si bien que la projection du trajet de chargement ψ dans l'hyperplan perpendiculaire aux directions de mesure de D_1 , D_2 , D_3 , D_4 et D_5 se réduit à un point (corde nulle).

La fonction de fatigue du critère est donnée par :

$$E_{DP} = \frac{A(\psi) + \alpha P_{Hmax}}{\beta} \quad (I.41)$$

où P_{Hmax} est la pression hydrostatique maximale atteinte au cours du cycle multiaxial considéré.

$A(\psi)$ est définie par :

$$A(\psi) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + D_5^2} \quad (I.42)$$

Le critère est calé à partir des deux limites de fatigue en traction et en torsion alternées symétriques σ_{-1} et τ_{-1} . Les deux constantes α et β sont alors données par :

$$\alpha = 3 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \sqrt{3} \quad (I.43)$$

$$\beta = \tau_{-1}$$

La condition $\alpha > 0$ implique pour ce critère le domaine de validité suivant :

$$\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

I.2.2.15 Le critère de Robert [29]

Le critère de Robert est établi en 1992. L'auteur définit un indicateur d'endommagement par plan E_h dans lequel il dissocie les influences respectives des parties moyenne et alternée de la contrainte normale et les combine avec la partie alternée de la contrainte tangentielle. L'indicateur d'endommagement est une maximisation sur le cycle de ces quantités :

$$E_h = \text{Max}_t \left\{ \frac{\tau_{ha}(t) + \alpha \sigma_{hha}(t) + \beta \sigma_{hnm}}{\theta} \right\} \quad (I.44)$$

La fonction de fatigue est basée sur la recherche du plan physique critique, qui est celui dont l'indicateur d'endommagement E_h est maximal :

$$E_{RB} = \text{Max}_h (E_h) \quad (I.45)$$

Le critère comporte trois constantes α , β et θ qui sont déterminées en vérifiant le critère ($E_{RB}=1$) à l'aide de trois limites de fatigue : la limite de fatigue en traction alternée symétrique σ_{-1} , celle en traction répétée σ_0 et celle en torsion alternée symétrique τ_{-1} . Les expressions des trois constantes sont :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\frac{2\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - 1}{\sqrt{\frac{2\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} \left(2 - \frac{2\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} \right)}} \\
\theta &= \tau_{-1} \sqrt{\alpha^2 + 1} \\
\beta &= \frac{2\theta}{\sigma_0} - \frac{\sigma_0}{8\theta} - \alpha
\end{aligned} \tag{I.46}$$

Le domaine de validité du critère est donné par : $\frac{1}{2} < \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} < 1$ et $\frac{1}{2} < \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_0} < 1$.

I.2.2.16 Conclusions

Les critères de fatigue de type plan critique modélisent le comportement en fatigue de la matière soumise à un cycle multiaxial de contraintes en postulant que l'endommagement sur le seul plan critique pilote le comportement en fatigue du matériau. La définition du plan critique ainsi que l'expression de la fonction de fatigue sont propres à chaque critère. A ce titre, deux remarques peuvent être faites.

La première d'entre elles concerne la détermination du plan critique. Certains auteurs définissent a priori le plan critique (en fonction d'un certain paramètre des contraintes) sur lequel ils calculent la valeur de la fonction de fatigue généralement différente et plus complexe que l'expression qui permet de déterminer le plan critique. Ce choix est ambigu dans la mesure où il peut exister un plan physique autre que le plan critique et pour lequel la valeur de la fonction de fatigue est supérieure. Au contraire les critères qui adoptent soit la maximisation d'un indicateur d'endommagement par plan, soit qui recherchent des termes de contraintes maximaux de telle manière qu'il n'y ait pas d'ambiguïté quant à la valeur maximale de la fonction de fatigue, apparaissent plus logiques dans leur démarche. Pour ces derniers critères, le plan critique est bien celui qui vit l'endommagement maximal au sens où il est défini par ceux-ci. Il y a cohérence entre la quantité qui décrit le dommage par fatigue et la condition qui permet de retenir le plan comme étant celui le plus sollicité du point de vue de la fatigue.

La seconde remarque est relative à la nature même des critères de fatigue de type plan critique. En effet, lorsque les sollicitations subies par la matière font qu'il n'y a pas unicité du plan critique mais au contraire qu'il existe un grand nombre de plans équivalents, la description du phénomène de fatigue sur un seul plan physique suffit-elle à rendre compte correctement du comportement réel en fatigue de la matière ? Les critères d'approche globale, décrits ci-après, témoignent d'une certaine façon d'une réponse négative à cette question, en particulier pour les critères d'approche globale utilisant eux aussi un indicateur d'endommagement par plan.

I.2.3 Les critères d'approche globale

Les critères d'approche globale forment la dernière famille de critères. Qu'ils soient basés sur des invariants du tenseur des contraintes ou de son déviateur, sur la moyenne quadratique d'un indicateur d'endommagement par plan ou encore sur un concept énergétique, ils possèdent tous un caractère global de par leur formulation. Certains critères, qui utilisent uniquement le premier invariant du tenseur des contraintes et le deuxième invariant du tenseur déviateur, peuvent être considérés comme une approche intermédiaire

entre les critères de type plan critique et ceux d'approche globale car ces deux termes de contrainte sont proportionnels aux contraintes normale et tangentielle qui agissent sur le plan octaédrique, plan bien évidemment particulier. Cette famille de critères regroupe 17 modélisations dont la plus ancienne date de 1955 et la plus récente est formulée en 1994.

I.2.3.1 Nomenclature

La majorité des critères basés sur le concept d'approche globale utilisent le premier invariant $I_1(t)$ du tenseur des contraintes $[\sigma_{ij}(t)]$ ou le second invariant $J_2(t)$ de son déviateur $[s_{ij}(t)]$. Utilisés par leur valeur moyenne ou leur amplitude, ces invariants représentent la globalité des contraintes de par leur définition. En effet, le premier invariant du tenseur des contraintes $I_1(t)$ (ou le triple de la pression hydrostatique $P_H(t)$) est proportionnel à la moyenne des contraintes normales $\sigma_{hh}(t)$ de tous les plans matériels passant par un point pour un état de contraintes donné en ce point. De même, la racine carrée du deuxième invariant $J_2(t)$ du tenseur déviateur des contraintes (ou la contrainte équivalente $\sigma_{eq.VM}(t)$ au sens de Von Mises) représente à un facteur près la moyenne quadratique des contraintes tangentielles $\tau_h(t)$ agissant sur l'ensemble des plans physiques possibles au point considéré. La liste ci-dessous récapitule les termes utilisés relatifs à ces deux invariants :

I_{1max} / I_{1min} : valeur maximale / minimale (au cours du cycle) du premier invariant du tenseur des contraintes,

$I_{1m} = \frac{I_{1max} + I_{1min}}{2}$: valeur moyenne du premier invariant du tenseur des contraintes,

$I_{1a} = \frac{I_{1max} - I_{1min}}{2}$: amplitude du premier invariant du tenseur des contraintes,

P_{Hm} : pression hydrostatique moyenne ($P_{Hm} = \frac{I_{1m}}{3}$),

P_{Ha} : amplitude de la pression hydrostatique ($P_{Ha} = \frac{I_{1a}}{3}$),

I_2 : deuxième invariant du tenseur des contraintes,

J_{2a} : amplitude du deuxième invariant du déviateur des contraintes. Elle correspond généralement à la valeur maximale du deuxième invariant du déviateur des contraintes alternées, soit $J_{2a} = \text{Max}_t(\sqrt{J_{2a}(t)})$ où $J_{2a}(t) = (s_{iia}^2(t) + 2s_{ija}^2(t))/2$

J_{2m} : valeur du deuxième invariant du déviateur des contraintes moyennes.

D'autres critères utilisent soit un indicateur d'endommagement par plan afin d'en réaliser une moyenne quadratique sur l'ensemble des plans matériels possibles, soit des quantités relatives à des énergies de déformation. Pour ces deux types de formulations, une nomenclature spécifique est donnée lors de leur présentation.

I.2.3.2 Le critère de Sines [30-32]

Etabli d'abord en 1955, ce critère a été modifié par son auteur en 1981 afin de l'exprimer en fonction des invariants du tenseur des contraintes et de son déviateur et non plus en fonction des deux termes des contraintes relatives au plan octaédrique (contraintes

octaédriques normale et tangentielle). La formulation du critère est une fonction de J_{2a} et de I_{1m} :

$$E_{SI} = \frac{\sqrt{J_{2a}} + \alpha I_{1m}}{A} \quad (I.47)$$

A la limite de fatigue, la fonction de fatigue du critère est égale à l'unité. Ceci est valable en particulier pour les deux limites de fatigue choisies pour caler le critère. Avec σ_0 limite de fatigue en traction répétée, et τ_{-1} , celle en torsion alternée symétrique, les constantes α et A s'expriment suivant :

$$\begin{aligned} A &= \tau_{-1} \\ \alpha &= 2 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_0} - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (I.48)$$

La validité du critère est assurée par la condition $\alpha > 0$, c'est à dire par :

$$\frac{\tau_{-1}}{\sigma_0} > \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

I.2.3.3 Le critère de Crossland [33,34]

Formulé en 1956, le critère de Crossland est très voisin de celui de Sines. Crossland propose d'utiliser la valeur maximale I_{1max} du premier invariant des contraintes au lieu de n'en prendre que la moyenne. La fonction de fatigue du critère s'écrit ainsi :

$$E_{CR} = \frac{\sqrt{J_{2a}} + B I_{1max}}{A} \quad (I.49)$$

Les deux constantes A et B, obtenues par le calage du critère sur les deux limites de fatigue σ_{-1} et τ_{-1} , s'expriment selon :

$$\begin{aligned} A &= \tau_{-1} \\ B &= \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (I.50)$$

Le critère est donc valide lorsque le rapport $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}}$ est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

I.2.3.4 Le critère de Marin [35]

Marin propose en 1956 lui aussi un critère d'approche globale où il compare $\sqrt{3}\sqrt{J_{2a}}$ (contrainte équivalente des parties alternées des contraintes au sens de Von Mises) à σ_{-1} (limite de fatigue en traction alternée symétrique) et $\sqrt{3}\sqrt{J_{2m}}$ (contrainte équivalente des contraintes moyennes) à R_m (résistance maximale à la traction).

$$E_{MA} = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{J_{2a}}}{\sigma_{-1}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{J_{2m}}}{R_m} \right)^2 \quad (I.51)$$

I.2.3.5 Le critère de Deitman & Issler 1 [36]

Deitman & Issler proposent en 1974 trois modélisations du comportement en fatigue. La première d'entre elles, le critère de Deitman & Issler 1, est inspirée de la modélisation du diagramme de Haigh par la parabole de Gerber :

$$E_{DI1} = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{J_{2a}}}{f_{-1}} \right)^2 + \frac{3P_{Hm}}{R_m} \quad (1.52)$$

I.2.3.6 Le critère de Deitman & Issler 2 [36]

La deuxième formulation proposée par Deitman & Issler modélise l'influence d'un cisaillement moyen sous la forme du terme J_{2m} en utilisant la résistance maximale à la torsion τ_u de la façon suivante :

$$E_{DI2} = \left(\frac{\sqrt{J_{2a}}}{\tau_{-1}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{J_{2m}}}{\tau_u} \right)^2 \quad (1.53)$$

I.2.3.7 Le critère de Deitman & Issler 3 [36]

Enfin, la troisième formulation de Deitman & Issler combine les deux formulations précédentes. Elle introduit l'influence à la fois d'une contrainte normale moyenne (par le terme P_{Hm}) et d'une contrainte tangentielle moyenne (par J_{2m}) sur les amplitudes des contraintes normale et tangentielle (prises en compte dans le terme J_{2a}). La fonction de fatigue du critère s'exprime ainsi :

$$E_{DI3} = \frac{\frac{\sqrt{3}\sqrt{J_{2a}}}{f_{-1}}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{J_{2m}}}{\tau_u} \right)^2 \left(1 - \frac{3P_{Hm}}{R_m} \right)}} \quad (1.54)$$

I.2.3.8 Le critère de Grübisic & Simbürger [37,38]

Le critère de Grübisic & Simbürger est un critère d'approche globale, formulé en 1976 et basé sur la moyenne quadratique d'un indicateur d'endommagement par plan E_h défini par deux modèles successifs. Pour le premier d'entre eux, il s'agit de :

$$E_h = \frac{\tau_{ha}}{\sigma_A} \quad (1.55)$$

où :

- τ_{ha} est l'amplitude du cisaillement sur le plan de normale h.

- σ_A est l'amplitude du cycle de traction-compression dont le rapport de contrainte est défini par $R = (1 + A)/(1 - A)$ avec $A = \tau_{ha}/\tau_{hm}$ calculé à partir d'un diagramme de Haigh établi à l'endurance. Ce dernier est modélisé par une droite passant par les points représentatifs des limites de fatigue σ_{-1} et σ_0 . τ_{hm} représente le cisaillement moyen sur le plan de normale h.

Pour le second modèle, l'indicateur d'endommagement par plan E_h est donné par :

$$E_h = \frac{S_{ha}}{\sigma_{A'}} \quad (1.56)$$

avec :

- S_{ha} est l'amplitude équivalente représentative des amplitudes de torsion τ_{ha} et de traction σ_{hha} sur le plan de normale h. Elle est donnée par :

$$S_{ha} = a\tau_{ha} + b\sigma_{hha} \quad (1.57)$$

- $\sigma_{A'}$ est l'amplitude du cycle de traction-compression calculée à partir du même diagramme de Haigh que celui défini précédemment pour le rapport de contrainte $R = (1 + A')/(1 - A')$ avec $A' = S_{ha}/S_{hm}$. S_{hm} représente la contrainte moyenne de cisaillement équivalente sur le plan de normale h. Elle est déterminée par :

$$S_{hm} = a\tau_{hm} + b\sigma_{hhm} \quad (1.58)$$

- Les constantes a et b sont établies lors du calage du critère en faisant l'hypothèse que la droite qui décrit le diagramme de Haigh en torsion a une pente identique au modèle obtenu en traction-compression. Cette hypothèse est très discutable au regard des résultats expérimentaux rassemblés par Smith [39] et présentés figure 1.5.

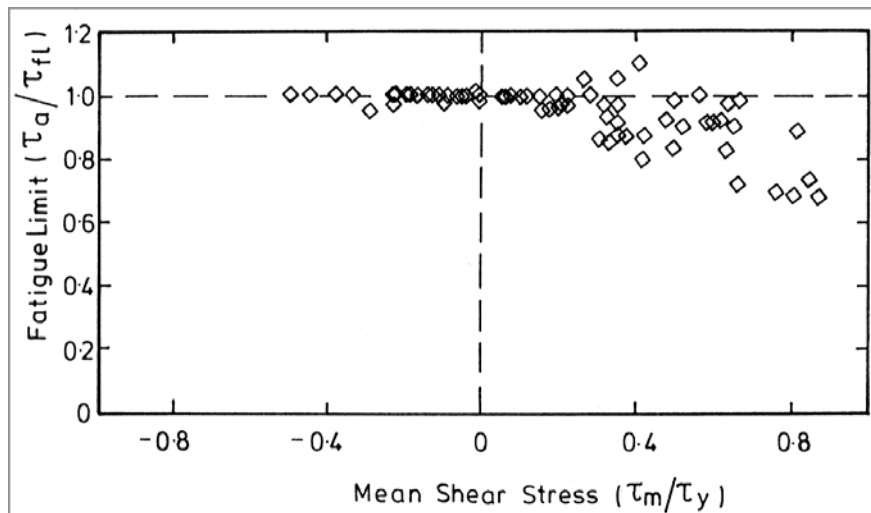


Figure 1.5. Effet de la contrainte tangentielle moyenne τ_m en fatigue sur différents aciers (d'après [39]).

Le critère réalise ensuite la moyenne quadratique des indicateurs d'endommagement E_h sur tous les plans physiques possibles par le biais d'une intégrale. Il s'écrit :

$$E_{GB} = k \sqrt{\frac{1}{S} \int_S E_h^2 dS} \quad (I.59)$$

où S représente l'aire d'une sphère de rayon unité ($S=4\pi$) dont la construction permet de passer en revue l'ensemble des plans physiques possibles : tout plan tangent à celle-ci est un plan physique particulier (figure I.6).

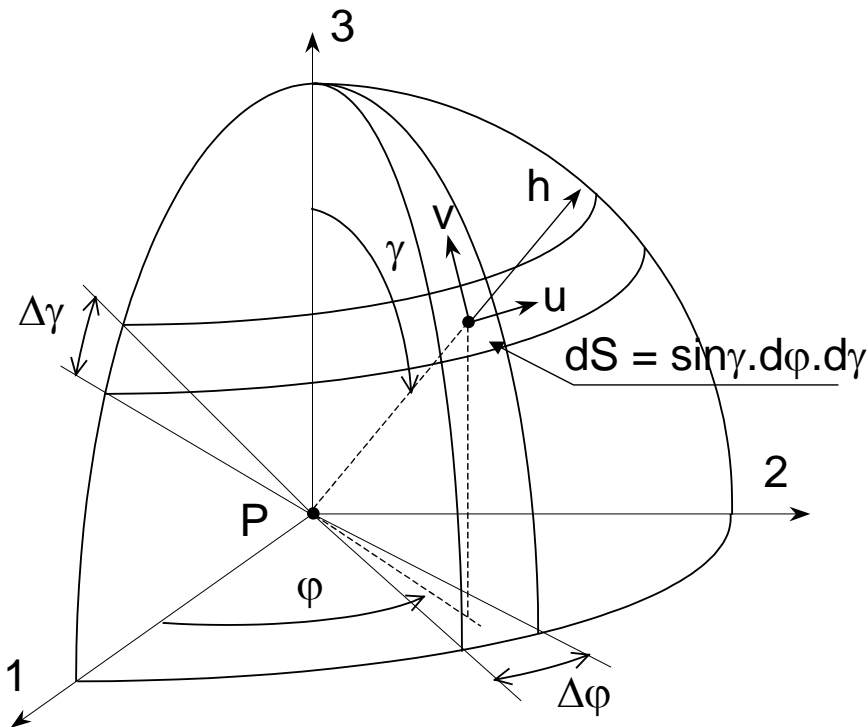


Figure I.6. Principe de représentation de l'ensemble des plans physiques passant par un point P à l'aide d'une sphère de rayon unité.

La constante k , tout comme les coefficients a et b pour le second modèle, sont obtenus par calage du critère. Il s'agit de vérifier le critère ($E_{GB} = 1$) pour deux limites de fatigue, en traction et en torsion alternées symétriques σ_{-1} et τ_{-1} par exemple. Une troisième limite de fatigue, en traction répétée σ_0 , est également nécessaire pour établir le diagramme de Haigh en traction-compression et par suite la valeur σ_A .

La détermination initiale des quantités τ_{ha} et τ_{hm} est réalisée en projetant le trajet de charge du plan de normale h sur une droite affine Δ du repère (u, v) lié à ce plan (figure I.7). La plus grande projection en étendue, obtenue en faisant tourner la droite Δ autour de l'origine du repère, permet de définir τ_{ha} et τ_{hm} . Il est néanmoins possible de construire le plus petit cercle circonscrit au trajet de charge dans le plan de normale h afin de déterminer ces deux termes de contraintes (cf. figure I.4). Il s'agit d'une autre façon de procéder mais le concept du critère est conservé.

Les deux propositions sont adaptées, selon les auteurs, à des matériaux ductiles pour la première et des matériaux semi-ductiles pour la seconde. Le critère proposé par Grübisch & Simbürger présente d'importants défauts. Il donne notamment un caractère bien trop pénalisant à la contrainte moyenne de cisaillement. Ces défauts ont fait l'objet de critiques de la part de Papadopoulos [40] et Robert [41].

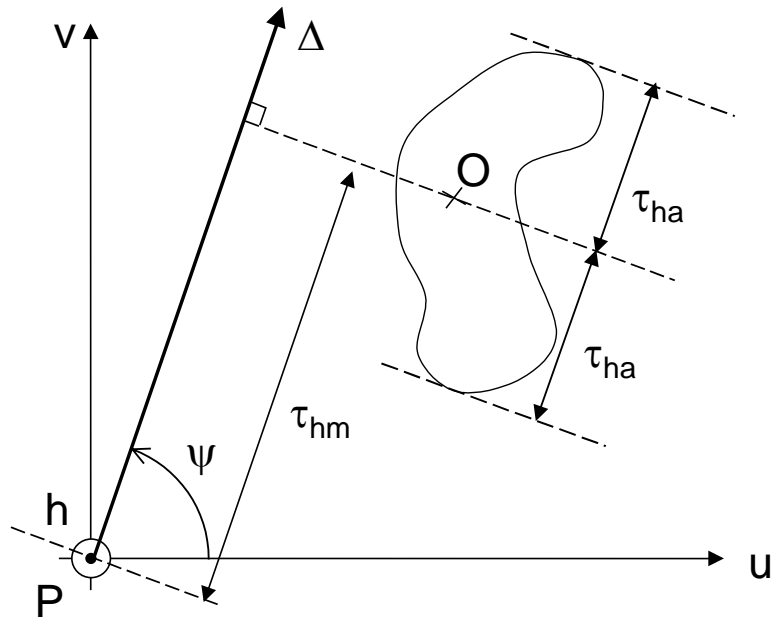


Figure I.7. Procédure de détermination de l'amplitude τ_{ha} et de la valeur moyenne τ_{hm} de la contrainte tangentielle selon Grübisic & Simbürger.

I.2.3.9 Le critère de Kinasoshvili [42,43]

L'auteur modélise le comportement en fatigue à l'aide du deuxième invariant des parties moyennes J_{2m} et alternées J_{2a} du tenseur déviateur des contraintes. Il combine linéairement ces deux quantités avec des coefficients dépendant des limites de fatigue obtenues en traction répétée (σ_0) et alternée symétrique (σ_{-1}). L'expression du critère établi en 1976 est la suivante :

$$E_{KS} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{J_{2a}}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_{-1}\sigma_0} \sqrt{J_{2m}} \quad (I.60)$$

I.2.3.10 Le critère de Kakuno & Kawada [44]

Etabli en 1979, le critère de Kakuno & Kawada distingue les influences respectives de l'amplitude et de la valeur moyenne de la pression hydrostatique ainsi que du deuxième invariant des parties alternées J_{2a} du tenseur déviateur des contraintes.

$$E_{KK} = \frac{\sqrt{J_{2a}} + \alpha P_{Hm} + \beta P_{Ha}}{\gamma} \quad (I.61)$$

Les trois constantes α , β et γ sont déterminées en vérifiant le critère ($E_{KK} = 1$) en torsion et traction alternées symétriques (τ_{-1} , σ_{-1}) et en traction répétée (σ_0) :

$$\alpha = 3\tau_{-1} \left(\frac{2}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma_{-1}} \right) \quad (I.62)$$

$$\beta = 3 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \sqrt{3} \quad \gamma = \tau_{-1}$$

Le domaine de validité du critère, imposé par les conditions $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, est défini par : $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_0} > \frac{1}{2}$ et $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

I.2.3.11 Le critère de Hashin [45,46]

Dans le cadre de sollicitations alternées symétriques, Hashin propose en 1981 une formulation à partir des premier et deuxième invariants (I'_1, I'_2) du tenseur des contraintes calculés sur les amplitudes des contraintes du cycle :

$$E_{HA} = \left(\frac{I'_1}{f_{-1}} \right)^2 - \frac{I'_2}{\tau_{-1}^2} \quad (I.63)$$

avec :

$$\begin{aligned} I'_1 &= \sigma_{11a} + \sigma_{22a} + \sigma_{33a} \\ I'_2 &= \sigma_{11a}\sigma_{22a} - \sigma_{12a}^2 + \sigma_{22a}\sigma_{33a} - \sigma_{23a}^2 + \sigma_{33a}\sigma_{11a} - \sigma_{31a}^2 \end{aligned} \quad (I.64)$$

Il compare ces valeurs des premier et deuxième invariants aux limites de fatigue en flexion et en torsion alternées symétriques respectivement. L'inconvénient majeur de ce critère réside dans le fait que l'auteur suppose que les sollicitations sont en phase et de même rapport de contraintes, ici $R = -1$. En présence de contraintes moyennes, l'auteur préconise une autre expression où, là encore, le déphasage entre les contraintes n'est pas pris en considération :

$$E_{HA} = \frac{2(\sigma_{-1} + \sigma_0)}{\sigma_{-1}\sigma_0} I'_1 - \frac{2}{\sigma_{-1}\sigma_0} I_1'^2 - \frac{I'_2}{\tau_{-1}^2} \quad (I.65)$$

I.2.3.12 Le critère de Fogue [47,48]

S'inspirant des travaux de Grübisc & Simbürger, Fogue propose en 1987 un critère basé sur la moyenne quadratique d'un indicateur d'endommagement E_h . Il introduit dans cet indicateur les influences relatives de l'amplitude et de la valeur moyenne de la contrainte normale au plan ainsi que de l'amplitude du cisaillement :

$$E_h = \frac{a\tau_{ha} + b\sigma_{hha} + d\sigma_{hhm}}{\sigma_{-1}} \quad (I.66)$$

Le critère réalise ensuite la moyenne quadratique des indicateurs de tous les plans physiques en utilisant la sphère de rayon unité (d'aire $S=4\pi$) définie par Grübisc & Simbürger (cf. figure I.6). La fonction de fatigue du critère s'écrit ainsi :

$$E_{FG} = \sqrt{\frac{1}{S} \int_S E_h^2 dS} \quad (I.67)$$

Le calage du critère, effectué avec les trois limites de fatigue τ_{-1} , σ_{-1} et σ_0 , conduit aux constantes et domaine de validité suivants :

$$\begin{aligned}
 b &= \sqrt{\frac{15 - \sqrt{9 \left(25 - 8 \left[\left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \right)^2 - 3 \right]^2 \right)}}{2}} \\
 a &= \sqrt{\frac{12 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \right)^2 - 21 + b^2}{2}} \\
 d &= \frac{1}{3} \left\{ -(3b + 2a) + \sqrt{(3b + 2a)^2 + 45 \left(4 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \right)^2 - 1 \right)} \right\} \\
 \text{avec : } &\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{1}{2} < \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_0} < 1
 \end{aligned} \tag{I.68}$$

I.2.3.13 Le critère de Papadopoulos 1 [40]

Le premier critère de Papadopoulos date de 1987. Proche du critère de type plan critique de Dang Van 2 car faisant partie des critères microscopiques, l'auteur propose la formulation suivante :

$$E_{PA1} = \frac{k^* + \alpha P_{Hmax}}{\beta} \tag{I.69}$$

où k^* est le rayon de la plus petite hypersphère contenant le cycle multiaxial de contraintes dans l'espace du déviateur des contraintes ; celle-ci est obtenue à l'aide d'un algorithme itératif particulier. Dans le cas de chargements multiaxiaux proportionnels, le critère de Papadopoulos 1 coïncide avec le critère de Crossland puisque $k^* = \text{Max}_t \sqrt{J_{2a}(t)} = \sqrt{J_{2a}}$. Les constantes, toujours obtenues avec les limites de fatigue σ_{-1} et τ_{-1} , sont d'ailleurs identiques au rapport 3 près pour la constante α puisque le critère utilise P_{Hmax} au lieu de I_{1max} .

$$\begin{aligned}
 \beta &= \tau_{-1} \\
 \alpha &= 3 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \sqrt{3}
 \end{aligned} \tag{I.70}$$

Le critère est valide lorsque le rapport $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}}$ est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

I.2.3.14 Le critère de Froustey & Lasserre [49]

Le critère de Froustey & Lasserre, proposé en 1992, est basé sur une approche énergétique. Pour les auteurs, l'endommagement est lié à l'énergie élastique développée par les contraintes, en distinguant celles propres à leurs parties sphérique et déviatorique. Le calcul des énergies sphérique et déviatorique est lui-même réalisé distinctement sur les

parties moyenne et alternée des contraintes. L'énergie totale du chargement moyen est ainsi définie par :

$$W_m = W_{1m} + W_{2m} = \frac{1-2\nu}{6E} I_{1m}^2 + \frac{1+\nu}{E} J_{2m} \quad (I.71)$$

L'énergie totale du chargement alterné est définie par :

$$W_a = W_{1a} + W_{2a} = \frac{1-2\nu}{6E} \frac{1}{T} \int_0^T I_{1a}^2(t) dt + \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{T} \int_0^T J_{2a}(t) dt \quad (I.72)$$

où ν , E et T sont respectivement le coefficient de Poisson, le module d'élasticité longitudinale (module d'Young) du matériau et la période du cycle multiaxial considéré. Deux énergies de référence sont ensuite établies par :

$$V_{1m} = \frac{W_m}{G(dT_m, \beta)} = \frac{W_m}{\left(\frac{\beta}{1-e^{-\beta}} \right) \left(\frac{1}{1-dT_m} \right) \left[1 - \frac{1}{\beta} \ln(1 + dT_m (e^\beta - 1)) \right]} \quad (I.73)$$

$$V_{2a} = \frac{W_a}{F(dT_a, \beta)} = \frac{W_a}{\left(\frac{1}{1-dT_a} \right) \left[1 - \frac{1}{\beta} \ln(1 + dT_a (e^\beta - 1)) \right]} \quad (I.74)$$

avec :

$$dT_m = \frac{W_{1m}}{W_m} \quad (\text{degré de triaxialité moyen}) \quad (I.75)$$

$$dT_a = \frac{W_{1a}}{W_a} \quad (\text{degré de triaxialité alterné}) \quad (I.76)$$

Le critère s'écrit alors :

$$E_{FL} = \sqrt{\frac{V_{2a}}{A} + \frac{V_{1a}}{B}} \quad (I.77)$$

Les trois constantes à déterminer sont A , B et β . Elles sont obtenues à l'aide des trois limites de fatigue σ_{-1} , σ_0 et τ_{-1} . La constante A est obtenue en vérifiant le critère ($E_{FL} = 1$) pour l'essai de torsion alternée symétrique τ_{-1} , ce qui conduit à :

$$A = \frac{1+\nu}{2E} \tau_{-1}^2 \quad (I.78)$$

En vérifiant le critère pour l'essai de traction alternée symétrique (σ_{-1}), on aboutit à l'équation (I.79), qui permet de déterminer la constante β .

$$\frac{1}{\beta} \ln \left[1 + \frac{1-2\nu}{3} (e^\beta - 1) \right] = 1 - \frac{\sigma_{-1}^2}{3\tau_{-1}^2} \quad (I.79)$$

Une fois la constante β établie, la vérification du critère pour la limite de fatigue σ_0 aboutit à l'expression suivante de la constante B :

$$B = \frac{\sigma_0^2}{E \times G \left(\frac{1-2\nu}{3}, \beta \right) \left[8 - \frac{\sigma_0^2}{2AE \times F \left(\frac{1-2\nu}{3}, \beta \right)} \right]} \quad (I.80)$$

La résolution de l'équation (I.79) impose : $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

I.2.3.15 Le critère de Papadopoulos 2 [50-52]

Le deuxième critère de Papadopoulos est établi en 1993. Le critère se compose en fait de deux expressions, respectivement pour les métaux doux et durs (la distinction est faite en fonction du rapport τ_{-1}/σ_{-1} des deux limites d'endurance propres au matériau).

a) Cas des métaux doux ($0,5 < \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} < 0,6$)

Dans le cas de métaux doux, le critère de Papadopoulos 2 s'écrit :

$$E_{PA2} = \frac{\text{Max}_{\varphi, \gamma} [T_{\sigma}(\varphi, \gamma)] + \alpha_1 P_{H\max}}{\beta_1} \quad (I.81)$$

où $T_{\sigma}(\varphi, \gamma)$ est la valeur efficace, sur le plan physique de normale h définie par les angles φ et γ , des amplitudes de la contrainte tangentielle $\tau_a(\varphi, \gamma, \psi)$ de l'ensemble des directions ψ .

On note $\tau_{h\psi}(t)$ la projection du vecteur contrainte tangentielle $\tau_h(t)$, agissant à l'instant t sur le plan de normale h , sur la droite affine orientée par l'angle ψ (figure I.8).

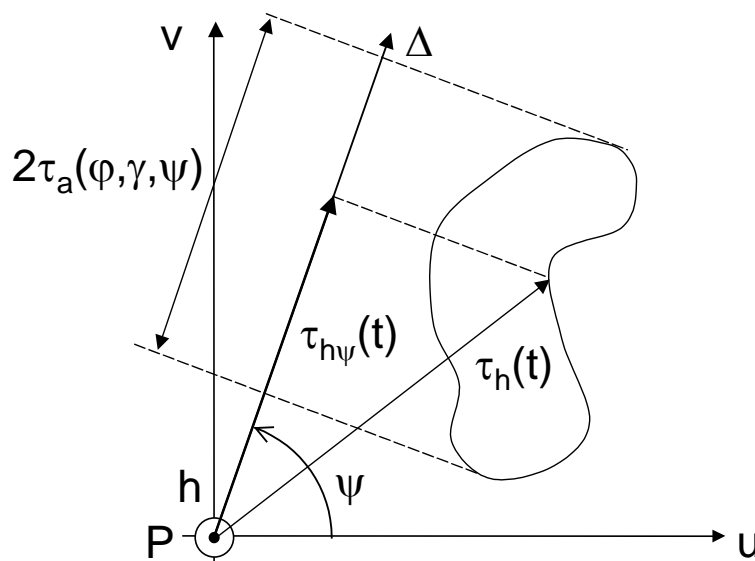


Figure I.8. Projection de $\tau_h(t)$ sur la droite orientée par l'angle ψ . Définition de $\tau_a(\varphi, \gamma, \psi)$.

L'amplitude de la contrainte tangentielle $\tau_a(\varphi, \gamma, \psi)$ dans la direction ψ est alors définie par :

$$\tau_a(\varphi, \gamma, \psi) = \frac{1}{2} \left[\text{Max}_t(\tau_{h\psi}(t)) - \text{Min}_t(\tau_{h\psi}(t)) \right] \quad (1.82)$$

La valeur efficace $T_\sigma(\varphi, \gamma)$ sur le plan considéré est alors donnée par :

$$T_\sigma(\varphi, \gamma) = \sqrt{\int_0^{2\pi} \tau_a^2(\varphi, \gamma, \psi) d\psi} \quad (1.83)$$

Le critère combine les valeurs maximales de la pression hydrostatique $P_{H\max}$ et de $T_\sigma(\varphi, \gamma)$. Son calage, réalisé avec les limites de fatigue en traction et en torsion alternées symétriques, conduit aux expressions suivantes des constantes α_1 et β_1 :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \sqrt{\pi} \tau_{-1} \\ \alpha_1 &= \sqrt{\pi} \frac{\tau_{-1} - \frac{\sigma_{-1}}{2}}{\frac{\sigma_{-1}}{3}} \end{aligned} \quad (1.84)$$

Le domaine de validité est donné par l'intervalle de définition des métaux doux, c'est à dire : $0,5 < \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} < 0,6$.

b) Cas des métaux durs ($0,6 \leq \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} < 0,8$)

Dans le cas des métaux durs, le critère s'écrit :

$$E_{PA2} = \frac{M_\sigma + \alpha_2 P_{H\max}}{\beta_2} \quad (1.85)$$

où M_σ représente la valeur efficace, sur l'ensemble des plans physiques possibles, de la valeur efficace $T_\sigma(\varphi, \gamma)$. La quantité M_σ est donc définie par :

$$M_\sigma(\varphi, \gamma) = \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_\sigma^2(\varphi, \gamma) \sin \gamma d\gamma d\varphi} \quad (1.86)$$

Le calage est ici aussi réalisé avec les limites de fatigue en traction et en torsion alternées symétriques. Les expressions obtenues des constantes α_2 et β_2 sont :

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \pi \sqrt{\frac{8}{5}} \tau_{-1} \\ \alpha_2 &= \pi \sqrt{\frac{8}{5}} \frac{\tau_{-1} - \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sigma_{-1}}{3}} \end{aligned} \quad (1.87)$$

Le domaine de validité est donné par la condition $\alpha_2 > 0$, c'est à dire pour l'intervalle de définition des métaux durs : $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} \geq 0,6$.

I.2.3.16 Le critère d'Altenbach & Zolocheski 1 [43]

Altenbach & Zolocheski proposent en 1992 un modèle unique regroupant plusieurs formulations (Sines, Crossland, Kinasoshvili, ...) selon les différentes combinaisons des constantes choisies. Ce modèle est formulé de la façon suivante :

$$\lambda_1 \sqrt{3} \sqrt{J_{2a}} + \lambda_2 I_{1a} + \lambda_3 \sqrt{3} \sqrt{J_{2m}} + \lambda_4 I_{1m} = \sigma_{-1} \quad (I.88)$$

avec :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} & \lambda_2 &= 1 - \lambda_1 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_0} - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \right) & \lambda_4 &= \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_0} - 1 - \lambda_3 \end{aligned} \quad (I.89)$$

où σ_{-1} et τ_{-1} sont les limites de fatigue en traction et en torsion alternées symétriques, σ_0 et τ_0 sont celles en traction et en torsion répétées.

Parmi les choix proposés par les auteurs, deux nouvelles formulations sont avancées. La première est obtenue en imposant $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ c'est à dire $\sigma_{-1} = \sigma_0$ et $\tau_{-1} = \tau_0$. La fonction de fatigue du critère s'écrit alors :

$$E_{AZ1} = \frac{\lambda_1 \sqrt{3} \sqrt{J_{2a}} + \lambda_2 I_{1a}}{\sigma_{-1}} \quad (I.90)$$

Le critère ainsi défini ne prend pas en compte les contraintes moyennes du cycle multiaxial examiné.

I.2.3.17 Le critère d'Altenbach & Zolocheski 2 [43]

La deuxième proposition d'Altenbach & Zolocheski, elle-aussi issue de l'équation (I.88), est obtenue pour $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$, ce qui correspond aux conditions $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et

$\frac{\tau_0}{\sigma_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. La fonction de fatigue du critère s'écrit alors :

$$E_{AZ2} = \frac{\lambda_1 \sqrt{3} \sqrt{J_{2a}} + \lambda_3 \sqrt{3} \sqrt{J_{2m}}}{\sigma_{-1}} \quad (I.91)$$

I.2.3.18 Le critère de Palin-Luc [53-55]

Proposé très récemment (1996), le critère de Palin-Luc est inspiré des travaux de Froustey & Lasserre, et est basé lui aussi sur des considérations énergétiques. Il considère

que l'endommagement lié à un cycle multiaxial de contraintes donné a lieu dans un volume critique noté V^* pour lequel la quantité d'énergie du cycle en question W_a est supérieure à une quantité d'énergie seuil propre à ce cycle W_a^* . Le volume critique V^* contient donc l'ensemble des points matériels de l'éprouvette testée où $W_a \geq W_a^*$. Les quantités W_a et W_a^* sont définies par :

$$W_a = \frac{1-2\nu}{6E} \frac{1}{T} \int_0^T I_{1a}^2(t) dt + \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{T} \int_0^T J_{2a}(t) dt \quad (I.92)$$

$$W_a^* = W_{a(\text{réf.})}^* \frac{F(dT_a, \beta)_{(\text{cycle})}}{F(dT_a, \beta)_{(\text{réf.})}} \quad (I.93)$$

où :

- l'énergie de référence $W_{a(\text{réf.})}^*$ est identifiée à l'aide des limites de fatigue obtenues en flexion rotative ($f_{-1}^{\text{rot.}}$) et en traction alternée symétrique (σ_{-1}) :

$$W_{a(\text{réf.})}^* = \frac{2\sigma_{-1}^2 - f_{-1}^{\text{rot.}2}}{4E} \quad (I.94)$$

- la fonction $F(dT_a, \beta)$, identique à celle définie par Froustey & Lasserre, est donnée par :

$$F(dT_a, \beta) = \left(\frac{1}{1-dT_a} \right) \left[1 - \frac{1}{\beta} \ln(1 + dT_a(e^\beta - 1)) \right] \quad (I.95)$$

- le degré de triaxialité dT_a est défini par :

$$dT_a = \frac{W_{1a}}{W_a} = \frac{\frac{1-2\nu}{6E} \frac{1}{T} \int_0^T I_{1a}^2(t) dt}{\frac{1-2\nu}{6E} \frac{1}{T} \int_0^T I_{1a}^2(t) dt + \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{T} \int_0^T J_{2a}(t) dt} \quad (I.96)$$

- la valeur de β est déterminée par la résolution de l'équation suivante :

$$\frac{1}{\beta} \ln \left[1 + \frac{1-2\nu}{3} (e^\beta - 1) \right] = 1 - \frac{f_{-1}^{\text{rot.}2}}{3\tau_{-1}^2} \quad (I.97)$$

L'auteur définit alors deux quantités qu'il compare pour situer le cycle multiaxial par rapport à la limite de fatigue du matériau. La première correspond à l'énergie ϖ_a relative à l'endommagement du volume critique V^* de matière et développée par le cycle multiaxial de

contraintes considéré. La seconde quantité, notée $\varpi_{a(\text{cycle})}^D$, est analogue à la première mais est déterminée à la limite de fatigue du matériau. Ces deux grandeurs sont définies par :

$$\varpi_{a(\text{cycle})} = \frac{1}{V^*} \iiint_{V^*} \left[W_{a(\text{cycle})} - W_{a(\text{cycle})}^* \right] dV \quad (I.98)$$

$$\varpi_{a(\text{cycle})}^D = \varpi_{a(\text{réf.})}^D \frac{F\left(dT_{a(\text{cycle})}, \beta\right)}{F\left(dT_{a(\text{réf.})}, \beta\right)} \quad (I.99)$$

avec :

$$\varpi_{a(\text{réf.})}^D = \frac{\sigma_{-1}^2 - f_{-1}^{\text{rot.}2}}{4E} \quad (I.100)$$

Le critère s'écrit alors :

$$E_{PL} = \sqrt{\frac{\varpi_{a(\text{cycle})}}{\varpi_{a(\text{cycle})}^D}} \quad (I.101)$$

A la limite de fatigue du matériau, la fonction de fatigue du critère est vérifiée ($E_{PL} = 1$). Cette formulation nécessite comme étape préliminaire et au demeurant assez complexe la détermination du volume critique V^* défini précédemment. L'auteur poursuit aujourd'hui ses investigations afin de prendre en compte la présence de contraintes moyennes dans le cycle multiaxial considéré.

I.2.3.19 Conclusions

Les critères d'approche globale proposent de nombreuses modélisations du comportement en fatigue. Les formulations de certains d'entre eux sont d'une mise en œuvre assez complexe : moyenne quadratique d'un indicateur de dommage par plan (Grübisic & Simbürger et Fogue), calcul basé sur les énergies (Froustey & Lasserre et Palin-Luc) ou valeurs efficaces (Papadopoulos 2). La famille des critères d'approche globale regroupe ainsi des modélisations très variées, dont les justifications sont basées sur des théories diverses et originales.

On peut cependant inverser la remarque donnée en conclusion des critères de type plan critique : si les critères d'approche globale sont appropriés lorsqu'un grand nombre de plans physiques passant par le point étudié sont équivalents, qu'en est-il de leur validité lorsque quelques plans seulement sont activés ? La confrontation de l'ensemble des critères avec la banque de données d'essais va permettre de comparer les deux approches (plan critique et approche globale) et, au sein de chaque famille, les critères les uns par rapport aux autres quant à leur capacité intrinsèque à prévoir le comportement en fatigue des matériaux.

1.3 Confrontation des critères avec la banque de données d'essais multiaxiaux

1.3.1 Objectifs

L'objectif de ce paragraphe est de confronter le plus grand nombre de critères de fatigue à la banque de données d'essais multiaxiaux présentée en annexe A. Etant donné que la banque de données d'essais rassemble un grand nombre de résultats expérimentaux (où interviennent les influences de déphasages, de contraintes moyennes, de biaxialité), la validation des critères revêt un caractère très large puisqu'elle est réalisée sur un ensemble de sollicitations très vaste. L'intérêt ici n'est pas de comparer les critères entre eux, mais de les prendre l'un après l'autre pour valider leur formulation sur un ensemble conséquent et donc représentatif de résultats expérimentaux. Les formulations n'ont pas toutes été confrontées aux essais et ceci pour plusieurs raisons :

- Les critères basés sur une modélisation empirique du comportement en fatigue ne sont pas engagés dans la procédure de validation car, comme cela a déjà été signalé, ils ne sont adaptés qu'à un type particulier de sollicitations combinées.
- Le critère Flavenot & Skalli est identique au critère de Dang Van 1. Seul le fait d'utiliser les contraintes en sous-couche et plus exactement dans la couche critique les différencie. L'ensemble des essais multiaxiaux sont décrits à partir des contraintes macroscopiques calculées en surface de pièce. Appliquer le critère de Flavenot & Skalli pour ces essais revient donc à employer le critère de Dang Van 1. Le critère de Flavenot & Skalli ne sera donc pas validé en tant que tel.
- Certaines données matériaux, nécessaires à la mise en œuvre de certains critères, ne sont pas connues. Parmi ces données, la résistance maximale à la torsion, notée τ_u , n'est pratiquement jamais établie. Aussi les critères qui l'utilisent ne sont-ils pas retenus. Il s'agit des modèles de Deitman & Issler 2 et de Deitman & Issler 3.
- Parmi l'ensemble des critères, celui de Grübisic & Simbürger n'a pas été programmé car sa formulation et les hypothèses que ses auteurs ont employées sont discutables et ont déjà été critiquées. De même le critère de Hashin ne fait pas partie de la campagne de validation. Ce critère distingue deux formulations suivant la présence ou non de contraintes moyennes et il néglige les déphasages existant entre les composantes du tenseur des contraintes.
- Le critère de Palin-Luc n'a pas été retenu car son formalisme complexe nécessite de connaître avec précision la géométrie des éprouvettes qui ont été utilisées expérimentalement, ce qui n'est pas le cas pour un bon nombre d'essais de la banque de données. Les dimensions sont en effet nécessaires pour établir le volume critique V^* défini par l'auteur. Soit cette information n'est pas accessible, soit elle demanderait un temps trop conséquent pour compléter l'ensemble des essais recensés.

I.3.2 Principe de validation des critères

Les auteurs d'un critère le valident généralement à l'aide d'essais de fatigue multiaxiaux. Les sollicitations appliquées pour ces essais sont dépendantes des types de machines employées. De même les éprouvettes utilisées sont fonctions des capacités de la machine, du type de chargement, et des niveaux de contraintes souhaités.

Tous les critères présentés, qu'ils soient issus de formulations empiriques, de type plan critique ou d'approche globale, ont été ramenés à un formalisme standard c'est à dire "normalisés" afin de pouvoir les comparer entre eux. On entend par "normalisation" le fait que pour chaque critère une fonction de fatigue notée E est établie et que lorsque la limite de fatigue du matériau est atteinte, cette fonction E est égale à l'unité. Cette condition est vérifiée lors du calage du critère. Pour cette opération, on impose au critère de vérifier plusieurs limites de fatigue sous sollicitations simples telles que σ_{-1} , τ_{-1} ou encore σ_0 afin de déterminer les constantes du critère. Utilisé pour un cycle de contrainte multiaxial d'une sollicitation périodique, la fonction de fatigue du critère donne généralement une valeur proche de l'unité, par excès ou par défaut. Suivant la valeur obtenue, le critère de fatigue permet de situer le cycle multiaxial considéré par rapport à la limite de fatigue du matériau :

- Quand $E < 1$, le critère considère que le cycle multiaxial présente des niveaux de contraintes inférieurs à la limite de fatigue du matériau. Le critère prévoit donc l'amorçage d'une fissure au delà de l'application de N cycles multiaxiaux, N étant le nombre de cycles admissibles à la limite de fatigue considérée. Dans ce cas le critère est dit non conservatif si la durée de vie effective du matériau est dans la réalité égale à N cycles.
- Quand $E > 1$, le critère juge que le cycle multiaxial est supérieur en contrainte à la limite de fatigue du matériau. Le critère prévoit donc l'amorçage d'une fissure avant l'application de N cycles multiaxiaux, N définissant le nombre de cycles admissibles à la limite de fatigue. Le critère est alors dit conservatif vis à vis du cycle considéré si la durée de vie effective du matériau est égale à N cycles.
- Si $E = 1$, le critère estime que la limite de fatigue du matériau en contrainte est atteinte par le cycle multiaxial considéré. Dans le cas d'une limite de fatigue définie à N cycles, le critère prévoit donc l'amorçage d'une fissure lors de l'application du $N^{\text{ème}}$ cycle multiaxial. Le critère est donc juste ou exact car il est en conformité avec la réalité expérimentale.

Les critères sont validés à partir de plusieurs essais multiaxiaux correspondant à la même limite de fatigue en terme de durée de vie, au même titre que les essais servant au calage, c'est à dire permettant d'obtenir les limites de fatigue en traction alternée symétrique σ_{-1} , en torsion alternée symétrique τ_{-1} et en traction répétée σ_0 . Si l'on exclut ces essais de calage, les fonctions de fatigue obtenues pour l'ensemble des essais permettent de juger de la pertinence de chaque critère. La précision ou justesse d'un critère se mesure en faisant la différence entre sa fonction de fatigue et l'unité (qui représenterait un critère parfait). Cette différence, appelée écart de validité, est notée ΔI :

$$\Delta I = E - 1 \quad (I.102)$$

Plus ΔI est proche de zéro, plus le critère est précis. Si ΔI est positif, le critère est conservatif ; inversement si ΔI est négatif, le critère est non conservatif. Comme la fonction de fatigue de la plupart des critères est proportionnelle aux contraintes, les critères sont équivalents lorsqu'ils présentent le même écart de validité. Les représentations graphiques

permettant de juger de la validité des critères donnent le nombre d'essais (en ordonnée) situés dans une classe d'appartenance (en abscisse), laquelle donne l'écart ΔI en pourcentage (de -40% à $+40\%$ par pas de 5% avec une classe centrale de $\pm 2\%$). La figure I.9 résume les différentes distributions susceptibles d'être rencontrées et leur tendance.

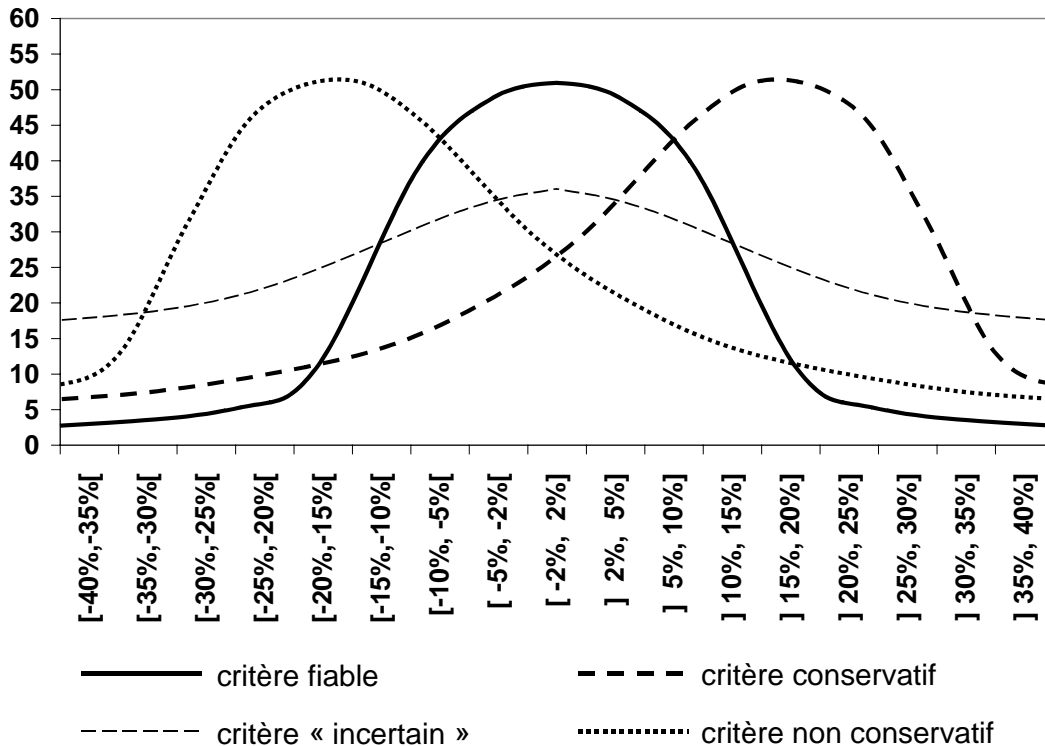


Figure I.9. Allures possibles des résultats de validation des critères (distributions des écarts de validité) et leur interprétation.

I.3.3 Présentation de la banque de données d'essais multiaxiaux

La banque de données regroupe un grand nombre d'essais de fatigue multiaxiaux menés généralement au seuil de l'endurance. Tirés de la littérature, les essais sont regroupés en série. A chaque série correspondent une référence, un matériau et un type de sollicitations. Sont données pour chaque série la résistance maximale du matériau à la traction R_m , ses limites de fatigue (ou d'endurance) en traction alternée symétrique σ_{-1} , en torsion alternée symétrique τ_{-1} et en traction répétée σ_0 (permettant le calage des critères) ainsi que le nombre de cycles N définissant le seuil de l'endurance.

La description des cycles multiaxiaux, qui correspondent tous à des états de contraintes biaxiaux, est obtenue à l'aide de fonctions sinusoïdales permettant d'introduire un déphasage. L'équation (I.103) donne l'expression de l'évolution d'une composante $\sigma_{ij}(t)$ du tenseur des contraintes :

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ijm} + \sigma_{ija} \sin(\omega t - \phi_{ij}) \quad (I.103)$$

où σ_{ijm} représente la valeur moyenne de la composante, σ_{ija} son amplitude, ϕ_{ij} son déphasage relatif (phase à l'instant initial $t = 0$) et ω sa pulsation. La description des cycles est réalisée avec 360 points (ou événements) correspondant à un pas d'incrément d'un degré de l'argument de la fonction sinusoïdale.

Présentée en annexe A, la banque de données regroupe 17 séries d'essais. Les matériaux y figurant sont des aciers, alliés ou non, ayant dans certains cas subi des traitements thermiques. Les essais les plus anciens datent de 1945 et les plus récents ont été recensés en 1992. L'ensemble constitue une banque de données réunissant 233 essais multiaxiaux de fatigue. Dans chaque série, les essais simples qui permettent le calage des critères de fatigue ont volontairement été exclus car ils ne permettent pas de les discriminer (tous les critères sont exacts pour ces essais par construction même). Le tableau I.1 récapitule l'ensemble des séries qui ont permis de valider les critères multiaxiaux.

N° série	Nbre essais	Auteurs, Année, Référence	Sollicitations	Matériau
100	9	Simbürger, 1975, [38]	• Flexion-Torsion	XC48
200	19	Simbürger, 1975, [38]	• Traction-Pression intérieure • Torsion-Pression intérieure	XC48
300	17	Mielke, 1980, [56]	• Traction-Pression intérieure • Traction-Torsion	25CrMo4
400	17	Heidenreich, Richter, Zenner, 1984, [57]	• Traction-Torsion	34Cr4
500	24	Froustey, Lasserre, 1988, [58]	• Flexion-Torsion	30NCD16
600	23	Dubar, 1992, [59]	• Flexion-Torsion	30NCD16
700	19	Issler, 1973, [60]	• Traction-Pression intérieure • Traction-Torsion-Pression intérieure	St35
800	26	Gough, Pollard, Clenshaw, 1951, [3]	• Flexion-Torsion	S.65A
900	15	Heidenreich, 1983, [61]	• Traction biaxiale-Torsion	34Cr4
1000	10	Lempp, 1977, [62]	• Flexion-Torsion	42CrMo4
1100	8	El Magd, Mielke, 1977, [63]	• Flexion biaxiale	St60
1200	18	Baier, 1970, [64]	• Traction-Torsion	34CrMo4
1300	5	Heidenreich, Zenner, 1979, [65]	• Flexion-Torsion	34Cr4
1400	8	Nishihara, Kawamoto, 1945, [10]	• Flexion-Torsion	Acier doux
1500	10	Nishihara, Kawamoto, 1945, [10]	• Flexion-Torsion	Acier dur
1600	3	Nolte, 1973, [66]	• Traction-Torsion	C35N
1700	2	Paysan, 1970, [67]	• Traction-Torsion	C35N

Tableau I.1. Récapitulatif de la banque de données d'essais (cf. Annexe A).