

Chapitre II : Prise en compte du gradient de contrainte dans les critères de fatigue multiaxiaux

Le gradient de contrainte, qui se traduit en fait par une évolution des contraintes dans la géométrie de la structure, qu'elle soit simple ou complexe, est reconnu depuis longtemps comme un facteur d'influence sur la tenue en fatigue. Cet effet est généralement introduit comme un effet d'entaille. Si cette terminologie décrit une variation des contraintes au voisinage d'une géométrie brusquement et fortement perturbée, il ne faut pas pour autant l'associer à la présence d'une fissure de taille macroscopique, pour laquelle on s'intéresse habituellement à sa propagation sous sollicitations de fatigue en mécanique de la rupture. Nous nous plaçons ici dans le cadre de concentrations de contraintes dues à une géométrie nécessaire établie en conception. A l'échelle macroscopique, l'effet d'entaille est traduit et traité comme une augmentation locale des contraintes dans un volume restreint par rapport à une répartition de contrainte nominale donnée par un modèle simple comme le modèle poutre. Cependant la notion de gradient de contrainte peut être généralisée à toute section droite d'une pièce ou à n'importe quel élément de volume d'un composant mécanique.

La présence d'une concentration de contrainte a deux conséquences contradictoires : elle introduit une surcharge locale en contrainte à laquelle la matière doit résister et donne lieu à un gradient de contrainte qui, dans le cas de sollicitations variables, aboutit à une amélioration de la tenue en fatigue de la structure au sein de laquelle il apparaît. La résistance d'un organe dimensionné en fatigue étant assujettie à la présence de gradients de contrainte, l'objectif de ce chapitre est donc de prendre en compte son existence afin d'améliorer la modélisation du comportement en fatigue pour des états de contraintes multiaxiaux. L'application visée a toujours pour cadre la méthode d'estimation de durée de vie sous chargement quelconque développée dans le troisième chapitre.

II.1 Effet du gradient de contrainte en fatigue

La présence d'un gradient de contrainte au sein d'un matériau conduit systématiquement à une meilleure résistance en fatigue. Cette influence peut être mise en évidence simplement au regard de deux essais de base au seuil d'endurance : l'un en traction-compression alternée symétrique, l'autre en flexion alternée symétrique. Le premier essai appliqué à une éprouvette lisse (ne présentant pas d'entaille) ne fait pas apparaître de gradient de contrainte dans la matière. Par contre le second essai, pratiqué sur une éprouvette identique, s'accompagne d'une distribution linéaire des contraintes allant d'une contrainte de traction à une contrainte de compression opposées en deux points symétriquement disposés sur la section droite (figure II.1).

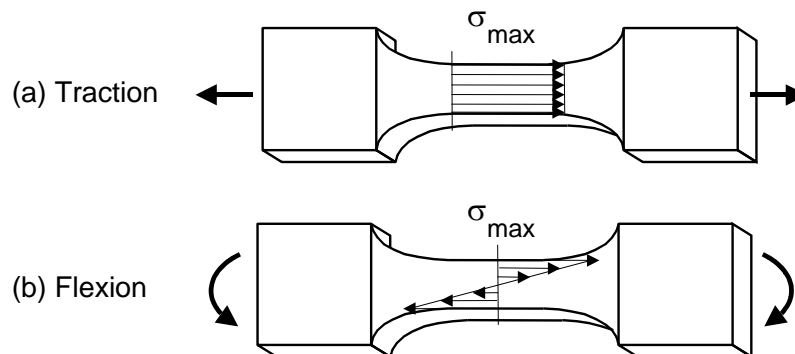


Figure II.1. Distribution des contraintes au droit de la section droite d'une éprouvette lisse soumise à une sollicitation (a) de traction (b) de flexion.

A nombres de cycles identiques à l'amorçage d'une fissure au seuil de l'endurance pour les deux types de sollicitations, l'expérience montre une limite d'endurance en flexion alternée symétrique f_{-1} (qu'il s'agisse de flexion plane ou de flexion rotative) toujours supérieure à celle obtenue en traction alternée symétrique σ_{-1} . En témoignent les résultats issus des travaux de Palin-Luc [53] présentés dans le tableau II.1 où sont données les limites d'endurance f_{-1} et σ_{-1} pour plusieurs matériaux.

Matériaux	N_D (cycles)	σ_{-1} (MPa)	f_{-1} (flexion rotative) (MPa)	Variation entre σ_{-1} et f_{-1} (%)
Acier 30NCD16	10^6	560	658	+17,5
Acier XC18	10^6	273	310	+13,6
Fonte GS61	10^6	245	280	+14,3
Acier 35CD4	10^7	558	581	+4,1

Tableau II.1. Comparaison des limites d'endurance en flexion rotative f_{-1} et en traction alternée symétrique σ_{-1} pour différents matériaux (d'après Palin-Luc [53]).

Pour l'ensemble de ces essais, la concentration de contrainte est négligeable (coefficient de concentration de contrainte k_t voisin de 1), du fait de la géométrie des éprouvettes toroïdales utilisées. Les différences de limite d'endurance observées ne peuvent donc pas être attribuées aux concentrations de contrainte (il n'y en a pas), elles ne sont dues qu'à la présence d'un gradient de contrainte dans un cas, gradient inexistant dans l'autre cas. Au point d'amorçage de la fissure (zone de la section droite où la contrainte atteinte est maximale), l'état de contrainte, décrit par le tenseur des contraintes, a rigoureusement la même forme : traction-compression uniaxiale.

Ce premier exemple montre l'effet bénéfique en fatigue du gradient dans le cadre de sollicitations simples uniaxiales appliquées à des éprouvettes lisses. Le gradient est ici présent en flexion par la nature même de la sollicitation. Aussi seule la limite d'endurance obtenue en traction-compression peut être considérée comme une grandeur caractéristique intrinsèque au matériau, dans ce sens où elle seule est exempte de l'effet du gradient. Nous proposons d'illustrer ce point de vue à l'aide d'autres exemples, qui montrent que la limite de fatigue en flexion n'est pas intrinsèque au matériau mais qu'elle dépend justement du gradient de contrainte dont la matière est le siège.

De nombreux résultats ont été obtenus en 1955 par Massonnet [68] sur un acier mi-dur au carbone (0,35% C). Son étude porte sur les effets d'échelle et les effets d'entaille. Il a réalisé un grand nombre d'essais au seuil de l'endurance illimitée sur des éprouvettes lisses puis sur des éprouvettes entaillées soumises à différentes sollicitations simples alternées symétriques (traction-compression, flexion plane, flexion rotative et torsion). Nous ne retenons pour l'instant que les résultats obtenus sur éprouvettes circulaires lisses "à grain fin" ayant subi un polissage mécanique et soumises à une traction-compression ou une flexion rotative. Ils sont rassemblés dans le tableau II.2 où figurent les diamètres et limites d'endurance des éprouvettes. La figure II.2 quant à elle donne l'évolution de ces limites d'endurance en fonction du diamètre des éprouvettes. Nous constatons une forte augmentation de la limite d'endurance en flexion dans le sens des diamètres décroissants et une valeur asymptotique quand le diamètre augmente. Ces effets sont à attribuer au gradient qui augmente quand le diamètre des éprouvettes diminue et inversement. En traction-compression, sollicitation pour laquelle le gradient est nul, les résultats montrent une légère tendance à l'augmentation de la limite d'endurance quand le diamètre diminue. La variation de cette limite peut être considérée comme un effet d'échelle dans la mesure où plus la

section est grande, plus le risque de rencontrer des défauts est important. De plus, comme toute la section est soumise au même niveau de contrainte, tout défaut présent est obligatoirement soumis à cette contrainte. Cette tendance observée pour une sollicitation de traction-compression est cependant peu marquée et le nombre de résultats ne permet pas en tout cas d'en déduire un comportement général. On peut imaginer qu'il existe, comme en flexion rotative, une valeur asymptotique proche des niveaux de contraintes donnés par Massonnet. Nous reviendrons plus en détail dans le paragraphe suivant sur l'interprétation phénoménologique, esquissée ici, de l'effet en fatigue de la présence d'un gradient de contrainte.

Sollicitation	Diamètre (mm)	Limite d'endurance (MPa)
Traction-compression alternée symétrique (σ_{-1})	5	237
	6	245
	16	232
	32	225
Flexion rotative (f_{-1})	2	281
	4	265
	8	257
	16	242
	32	220
	56	226

Tableau II.2. Limites d'endurance en flexion rotative f_{-1} et traction-compression alternée symétrique σ_{-1} d'éprouvettes lisses de différents diamètres et polies mécaniquement (d'après Massonnet [68]).

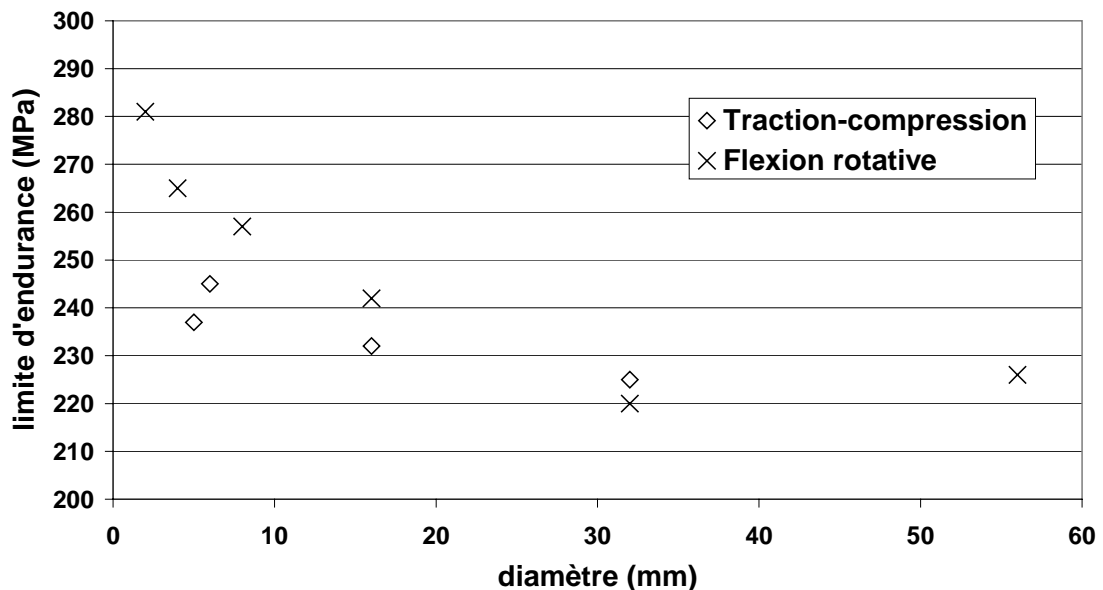


Figure II.2. Evolution des limites d'endurance en traction-compression alternée symétrique et en flexion rotative d'éprouvettes lisses en fonction de leur diamètre (d'après Massonnet [68]).

Les travaux menés par Massonnet n'ont pas porté uniquement sur les effets d'échelle, que nous venons de voir, mais également sur les effets d'entaille. Il s'agit là de la terminologie communément employée pour désigner la modification de la répartition des contraintes locales liée à un accident géométrique qui fait apparaître simultanément un gradient des contraintes. Plusieurs éprouvettes "à grain fin" et polies mécaniquement, dont les entailles sont décrites figure II.3, ont été testées en traction-compression alternée (5 essais), en flexion plane alternée (1 essai) et en torsion alternée (6 essais). Le diamètre (2a) de la section utile de toutes ces éprouvettes est de 16 mm.

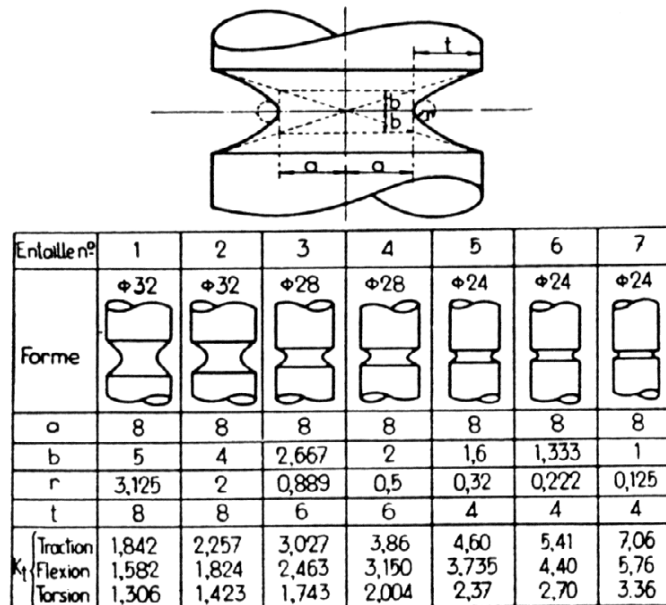


Figure II.3. Définition géométrique des entailles usinées des éprouvettes de Massonnet (extrait de [68]).

L'ensemble des résultats présentés par l'auteur donne pour chacune des éprouvettes la limite d'endurance en terme de contrainte nominale, le coefficient de fatigue k_f , le coefficient de concentration de contrainte k_t et enfin l'indice de sensibilité à l'entaille q . Ces résultats sont rappelés dans le tableau II.3.

Le coefficient de fatigue k_f (ou coefficient de réduction de résistance à la fatigue) est défini comme le rapport de la limite d'endurance de l'éprouvette lisse de diamètre 16 mm (232 MPa en traction-compression alternée, 270 MPa en flexion plane alternée et 140 MPa en torsion alternée) sur la limite d'endurance de l'éprouvette entaillée en terme de contrainte nominale. Le coefficient de concentration de contrainte k_t , donné figure II.3, dépend quant à lui des dimensions de l'entaille et du type de sollicitations. Enfin le coefficient de sensibilité à l'effet d'entaille q est défini par :

$$q = \frac{k_f - 1}{k_t - 1} \quad (\text{II.1})$$

Ce coefficient, défini dès lors qu'il y a concentration de contrainte ($k_t \neq 1$), représente un taux qui peut être interprété de la façon suivante [69,70] :

- Si k_f est égal à k_t alors q est égal à l'unité, soit à 100%. On dit que la sensibilité du matériau à l'effet d'entaille est maximale. La limite de fatigue effective du matériau est la même que celle de l'éprouvette lisse (il n'y a aucun gain quant à cette limite de fatigue).

- Si $k_f = 1$, alors q est nul pour toute valeur du k_t . On dit qu'il n'y a pas d'effet d'entaille. La limite de fatigue effective du matériau est celle de l'éprouvette lisse augmentée dans le même rapport que l'est la contrainte en fond d'entaille (rapport k_t).

La présence d'une entaille a donc généralement deux incidences contradictoires en fatigue : d'une part une augmentation du niveau de contrainte locale (dans le rapport k_t) et une diminution de la limite d'endurance (en contrainte nominale) dans le rapport k_f . Puisque k_f est inférieur ou égal à k_t , il y a donc un effet bénéfique sur les niveaux de contraintes maximums admissibles à l'endurance en terme de contrainte effective. La valeur de q , située entre 0 et 1 est donc un paramètre permettant de suivre la sensibilité du matériau à l'entaille.

Les limites d'endurance déterminées par Massonnet sont exprimées en contrainte nominale. Même si la tendance à l'augmentation de la limite d'endurance avec l'acuité de l'entaille apparaît, elle n'est pas, sous cette forme, aussi flagrante que lorsqu'elle est exprimée en terme de niveaux réels de contraintes atteints en fond d'entaille (contraintes réelles ou effectives). Pour illustrer ce propos, nous avons fait figurer dans le tableau II.3 la contrainte effective à la limite d'endurance, obtenue en multipliant la limite d'endurance nominale σ_D^{nom} par le coefficient de concentration de contrainte k_t , ceci pour chaque essai.

Sollicitation	Entaille n° (cf. fig.II.3)	Limite d'endurance exprimée en "contrainte nominale" σ_D^{nom} (MPa)	k_f	k_t	$q = \frac{k_f - 1}{k_t - 1}$	Contrainte "locale" maximale $k_t \cdot \sigma_D^{\text{nom}}$ (MPa)
Traction- compression alternée	1	137	1,69	1,84	0,82	252
	2	120	1,93	2,26	0,74	271
	3	109	2,13	3,03	0,56	330
	5	86	2,70	4,60	0,47	396
	7	91	2,55	7,06	0,26	642
Flexion plane alternée	7	154	1,75	5,76	0,16	887
Torsion alternée	1	134	1,04	1,31	0,13	176
	2	120	1,17	1,42	0,40	170
	3	106	1,32	1,74	0,43	184
	4	117	1,20	2,00	0,20	234
	6	117	1,20	2,70	0,12	316
	7	114	1,23	3,36	0,10	383

Tableau II.3. Limites d'endurance obtenues par Massonnet [68] pour les éprouvettes entaillées.

L'ensemble des résultats d'essais du tableau II.3 ont été obtenus pour des éprouvettes de section utile identique. Le gradient de contrainte existant pour chaque essai évoluant dans le même sens que le coefficient de concentration de contrainte correspondant, les résultats présentés dans le tableau II.3 montrent que la limite d'endurance effective du matériau augmente avec le gradient de contraintes induit par leur distribution. Il y a donc bien un effet bénéfique du gradient en fatigue.

Sur la figure II.4 est représentée l'évolution de la limite d'endurance, exprimée en contrainte maximale, en fonction du coefficient de concentration de contrainte k_t .

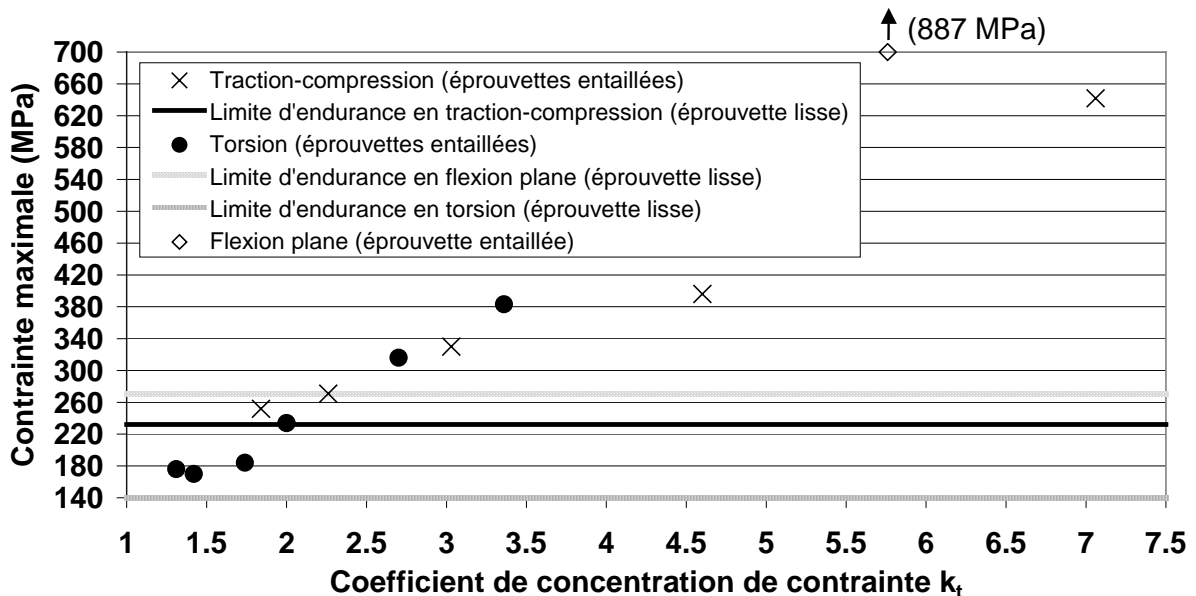


Figure II.4. Augmentation des limites d'endurance exprimées en contrainte maximale pour un gradient croissant avec k_t (d'après [68]).

En 1965 d'autres chercheurs, Pogoretskii et Karpenko [71], dont les travaux ont été cités par Papadopoulos en 1996 [72], ont mis en évidence l'effet bénéfique en fatigue du gradient de contrainte. Ils ont prélevé un grand nombre d'échantillons d'une barre d'acier faiblement allié (0,45% C, 0,99% Cr, 0,82% Mn, 0,25% Si, 0,15% Ni, 0,026% P, 0,021% S) et dont la dénomination est "40Kh". L'objectif de leur étude était d'observer l'effet des dimensions comme le diamètre, la longueur de la partie utile et le rayon de raccordement d'éprouvettes lisses sans concentration de contrainte sur la limite d'endurance pour une sollicitation de flexion à moment constant (flexion quatre points). Papadopoulos a repris leurs résultats pour montrer l'importance relative liée à l'effet d'échelle et à l'effet du gradient de contrainte. Concernant l'effet d'échelle, il a regroupé les limites d'endurance obtenues pour plusieurs longueurs d'éprouvette à rayon constant ($R = 10$ mm). Il a également rassemblé les limites d'endurance pour des diamètres différents et une longueur constante ($L = 20$ mm) afin d'observer l'effet du gradient. Nous avons reproduit, à partir des résultats de Pogoretskii et Karpenko, les graphiques donnés par Papadopoulos (figures II.5 et II.6).

A rayon constant, Papadopoulos attribue à l'effet d'échelle la diminution de la limite d'endurance pour des longueurs croissantes de partie utile d'éprouvette. La pente liée à cette diminution est de l'ordre de 0,2 MPa par millimètre (figure II.5). Si cette tendance est constatée pour une éprouvette de rayon 10 mm, la tendance inverse par contre est observée avec un rayon de 1,5 mm. L'aspect statistique relatif à la présence de défauts peut expliquer, comme nous en avons ébauché l'idée précédemment, la diminution de résistance en fatigue quand la longueur de la partie utile de l'éprouvette augmente. La tendance inverse observée par Pogoretskii et Karpenko avec des éprouvettes à faible rayon (1,5 et 2,5 mm) peut se comprendre par un effet de concentration de contrainte, donc de gradient, si l'on observe la disproportion entre les dimensions. Le rayon de raccordement entre la partie utile et le corps de l'éprouvette est soit le triple du diamètre, soit fixé à 30 mm. Lorsque les longueurs des parties utiles sont faibles (inférieures à 12 mm), nous pouvons imaginer qu'une concentration de contrainte soit effective bien que les auteurs aient voulu l'éviter au départ. L'effet d'échelle est alors effacé par la concentration de contrainte occasionnée, ce qui explique la tendance inverse constatée pour les éprouvettes de rayon égal à 1,5 mm.

A longueur constante, la diminution du rayon de l'éprouvette fait croître dans un rapport inversement proportionnel le gradient de contrainte présent au sein des éprouvettes lisses. La figure II.6 montre l'influence bénéfique du gradient : plus le rayon diminue donc plus le gradient de contrainte augmente, plus la limite de fatigue obtenue en flexion à moment constant croît. La pente associée à la variation de limite d'endurance pour une longueur constante de 20 mm est de 4,6 MPa par millimètre au rayon, soit de 2,3 MPa par millimètre au diamètre. L'ensemble des résultats de Pogoretskii et Karpenko obéit à la même règle : la limite d'endurance croît toujours avec la diminution du rayon des éprouvettes, c'est à dire avec l'augmentation du gradient de contrainte.

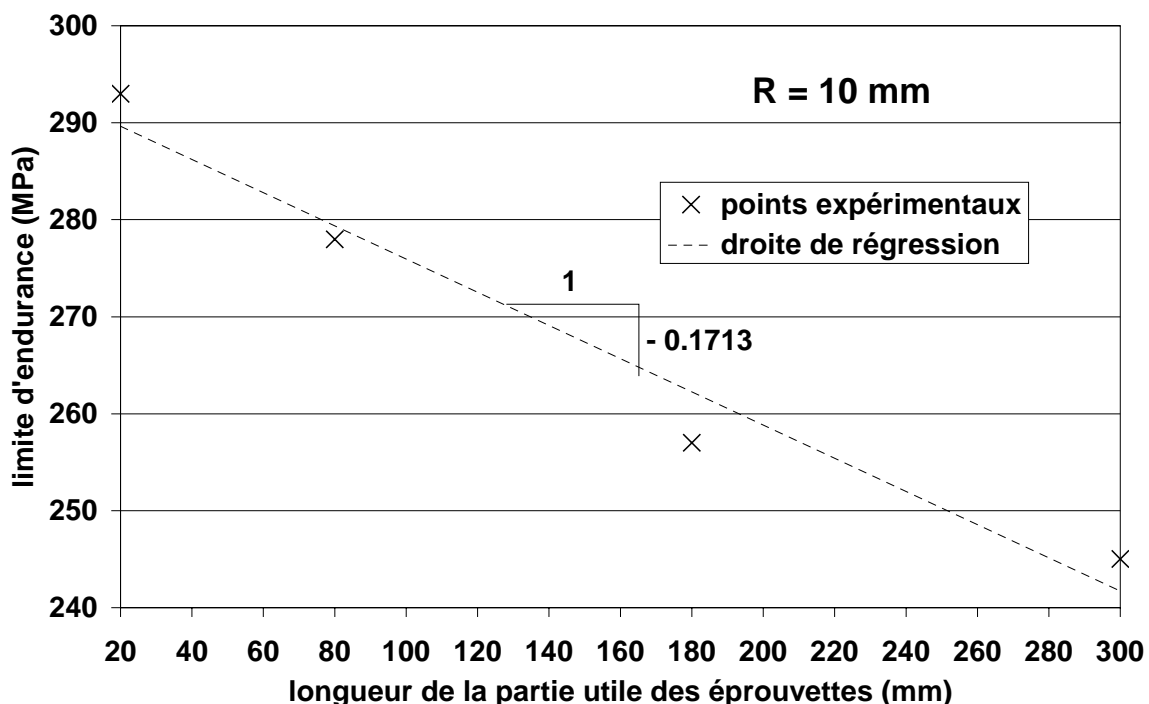


Figure II.5. Variation de la limite d'endurance en fonction de la longueur utile des éprouvettes (d'après [72]).

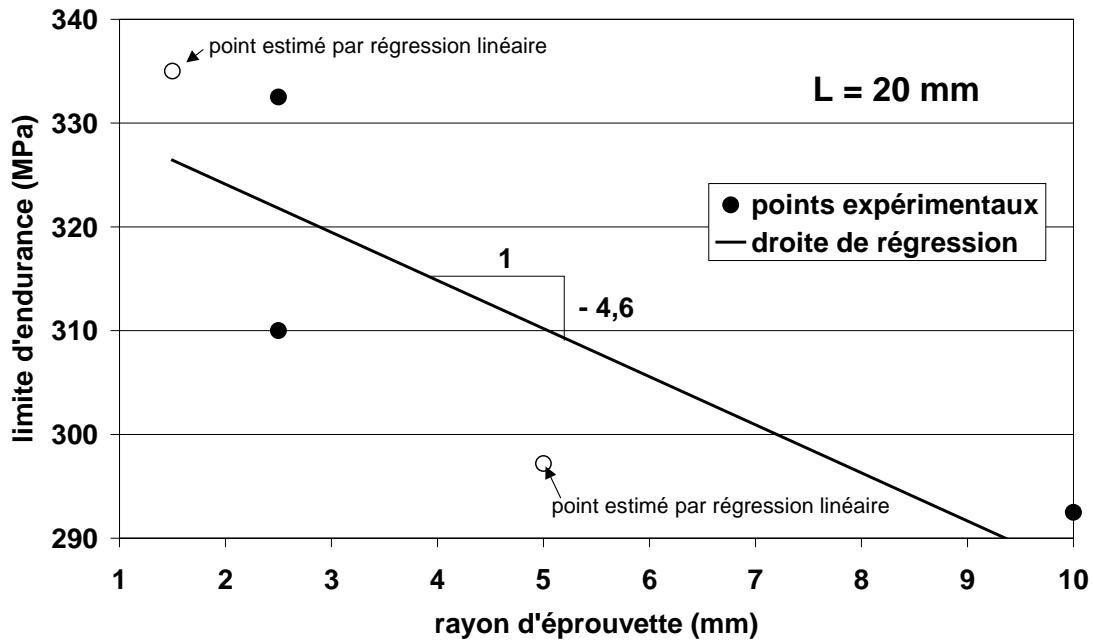


Figure II.6. Variation de la limite d'endurance en fonction du rayon des éprouvettes (d'après [72]).

II.2 Interprétation de l'effet du gradient de contrainte

L'amorçage d'une fissure macroscopique se localise le plus fréquemment à la surface des pièces et est directement lié à la nature du matériau et au type de chargement. Le phénomène d'endommagement par fatigue conduisant à l'amorçage d'une fissure sous sollicitations cycliques suit un processus métallurgique connu [73]. Ainsi pour un acier isotrope, tous les défauts, qu'il s'agisse de défauts d'empilement du métal, de la présence d'inclusions, ou autres, sont répartis uniformément dans la matière. La présence de ces défauts crée à l'échelle microscopique des concentrations de contrainte sources de microplasticité. Le chargement cyclique impose alors au volume de matière des déformations activant des plans de glissement. Des bandes de glissement persistantes apparaissent, caractéristiques de l'endommagement de la matière. Leur orientation dépend des états de contraintes successifs et de la sensibilité du matériau à ces dernières.

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que la présence d'un gradient de contrainte se manifeste par une augmentation de la limite d'endurance en terme de contrainte maximale locale. Que ce soit en flexion sur des éprouvettes lisses de diamètres différents, en flexion, traction ou torsion sur des éprouvettes présentant des entailles différentes, le gradient produit toujours un effet bénéfique sur la tenue en fatigue.

Le phénomène d'endommagement par fatigue étant directement lié à la présence de défauts nous pouvons justifier par un point de vue statistique l'augmentation des propriétés de fatigue en terme de contrainte maximale admissible. L'observation de la distribution des contraintes d'une éprouvette lisse soumise à une traction montre que tout le volume de matière de la partie utile, que l'on peut étudier sur une section droite, est soumis au même niveau de contrainte maximale (figure II.7). L'apparition du phénomène de fatigue due aux variations des contraintes va se produire dans le volume le plus sollicité (c'est à dire dans la section la plus chargée) qui contient par hypothèse des défauts répartis de façon homogène. La probabilité de rencontrer un défaut est d'autant plus grande que ce volume est lui-même important. Comme toute la partie utile est sollicitée de manière identique, ce type de chargement correspond, à cycle de contrainte identique, au cas le plus défavorable du point de vue de la tenue en fatigue.

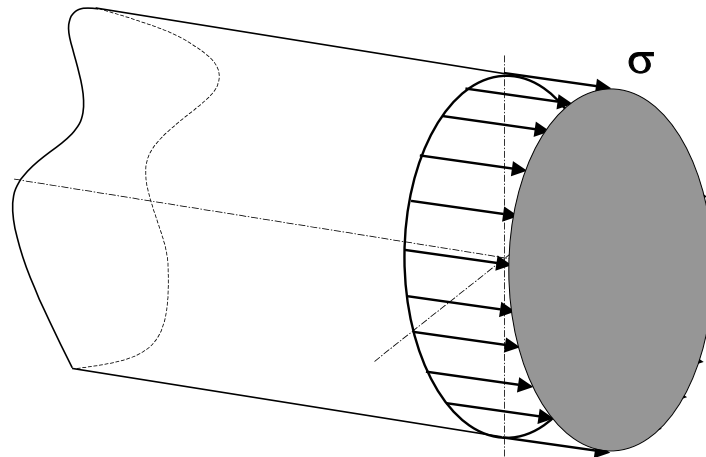


Figure II.7. Distribution des contraintes dans la section utile d'une éprouvette cylindrique sollicitée en traction alternée symétrique.

Considérons la même éprouvette sollicitée maintenant en flexion rotative. La répartition des contraintes dans une section utile de l'éprouvette a une forme de cône : les contraintes maximales sont obtenues sur toute la périphérie de la section droite puis décroissent linéairement sur un rayon jusqu'au centre où elles sont nulles (figure II.8). Dans ce cas de figure, la section n'est pas sollicitée uniformément. Seule la périphérie de la section droite, et avec elle les défauts qu'elle contient, subissent les cycles de contraintes les plus sévères. Les défauts étant répartis par hypothèse de façon homogène sur toute la section droite, ils sont statistiquement moins nombreux que dans le cas d'une sollicitation de traction-compression à subir les cycles de contraintes les plus endommageants. La zone soumise à ces cycles de contraintes étant donc de taille plus faible, il est tout à fait admissible qu'en contrepartie des niveaux de contraintes plus importants puissent être appliqués afin d'obtenir un amorçage de fissure au bout du même nombre de cycles. C'est ainsi que la limite d'endurance apparaît plus importante en flexion rotative qu'en traction-compression alternée symétrique. Tout se passe comme si une probabilité d'amorçage identique était obtenue dans le cas d'un volume réduit de matière soumis à des niveaux de contraintes importants et dans le cas d'un volume plus important de matière mais soumis à des cycles de contrainte de moindre amplitude. La présence d'un gradient engendre une disparité des niveaux de contraintes au sein de la matière. Elle implique donc des zones exposées à des sollicitations importantes et d'autres moins sollicitées donc moins affectées par la fatigue et ainsi, dans une certaine mesure, protégées. Le gradient est donc une caractéristique de la répartition des contraintes qui reflète cette disparité. Il peut par conséquent être utilisé pour la représenter et, en fin de compte, la modéliser.

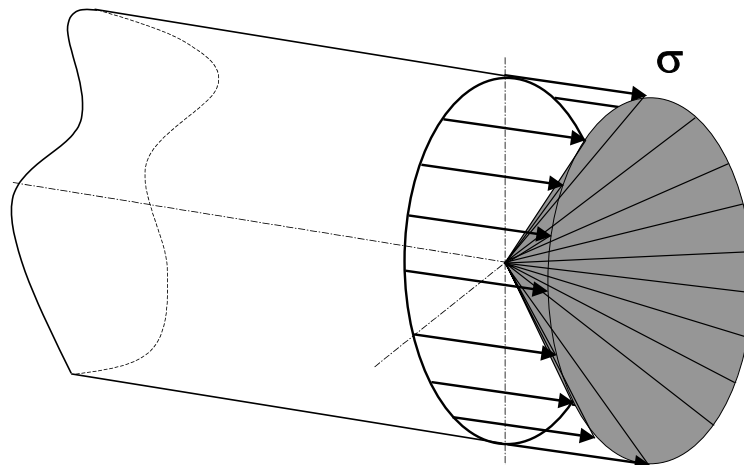


Figure II.8. Répartition des contraintes sur une section utile d'une éprouvette sollicitée en flexion rotative.

Afin de conforter l'interprétation statistique de l'aspect bénéfique du gradient de contrainte par un nouvel exemple, nous pouvons observer, pour le même type d'éprouvette, une amélioration sensible de la limite de fatigue au seuil de l'endurance entre une sollicitation de flexion rotative et une autre de flexion plane alternée. La figure II.9 donne la répartition des contraintes dans une section droite. Les deux fibres supérieure et inférieure de l'éprouvette sont seules soumises au cycle de contrainte le plus important. La probabilité de rencontrer des défauts dans la zone la plus sollicitée est donc plus faible qu'en flexion rotative. L'augmentation de la limite d'endurance en flexion plane alternée vis à vis de celle obtenue en flexion rotative s'explique par le même raisonnement que celui qui nous a servi à justifier les différences de limites de fatigue en traction-compression alternée et en flexion rotative. L'endommagement par fatigue au seuil de l'endurance en flexion plane nécessite des niveaux de contraintes plus importants puisque le volume de matière le plus sollicité est plus faible que ce qu'il est pour une sollicitation de flexion rotative. Le niveau de contrainte rencontré en flexion plane étant plus important, son gradient est lui-même plus important que celui présent en flexion rotative. Cela étaye l'hypothèse d'un effet bénéfique du gradient proportionnel à sa valeur absolue. Le tableau II-4 présente les limites d'endurance en flexion plane et flexion rotative obtenues par Palin-Luc [53] pour différents matériaux.

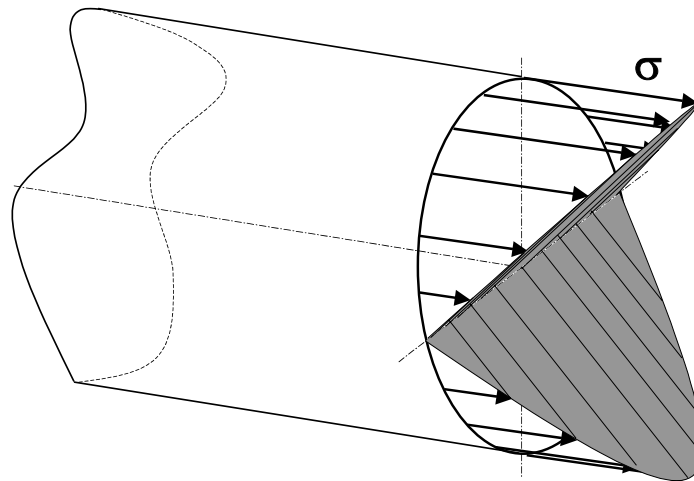


Figure II.9. Distribution des contraintes maximales dans la section utile d'une éprouvette cylindrique sollicitée en flexion plane alternée symétrique.

Nuance	N_D (cycles)	f_{-1}^{rotative} (flexion rotative) (MPa)	f_{-1}^{plane} (flexion plane) (MPa)	Variation entre f_{-1}^{rotative} et f_{-1}^{plane} (%)
Acier 30NCD16	10^6	658	690	+4,9
Acier XC18	10^6	310	332	+7,1
Fonte GS61	10^6	280	294	+5
Acier 35CD4	10^7	581	620	+6,7

Tableau II.4. Limites d'endurance obtenues pour différentes nuances d'acier en flexion rotative et flexion plane alternée symétrique (d'après [53]).

Cette justification statistique de l'effet bénéfique du gradient de contrainte peut encore expliquer l'augmentation de la limite d'endurance d'une éprouvette présentant une entaille et sollicitée en traction alternée symétrique. Plus l'entaille est marquée, plus la concentration de contrainte est accrue. Le gradient de contrainte suit l'évolution du

coefficient de concentration de contrainte k_t . Ainsi la distribution des contraintes dans la section droite contenant le fond d'entaille montre que le volume de matière soumis au niveau maximal de contrainte est de plus en plus restreint au fur et à mesure que l'entaille est marquée. Les défauts étant supposés répartis uniformément dans le volume contraint, un niveau de contrainte plus important compense la diminution de volume de matière le plus fortement sollicité pour un endommagement effectif au seuil de l'endurance.

Nous pouvons donc résumer notre explication statistique de la façon suivante : pour une pièce soumise à une sollicitation de fatigue au seuil de l'endurance et dont les défauts sont répartis de manière homogène dans son volume, plus le gradient de contrainte présent est important, plus le niveau de contrainte supportable est élevé. La probabilité d'amorçage des défauts présents dans la zone fortement sollicitée est équivalente à celle rencontrée pour une zone uniformément sollicitée (gradient nul) à un niveau moindre, mais plus importante en taille.

Les défauts métallurgiques se comportent comme des catalyseurs de l'endommagement. Plus ils sont nombreux à être activés, plus faible doit être le niveau de contrainte auquel ils peuvent être soumis.

II.3 Prise en compte de l'effet du gradient de contrainte

Même si les effets expérimentaux sont bien reconnus, peu nombreux sont les travaux utilisant le gradient de contrainte au sens mathématique pour modéliser le comportement en fatigue des matériaux métalliques. Les plus récentes études ont été réalisées par Brand et Sutterlin [74,75] en 1980 et par Papadopoulos [72] en 1996.

II.3.1 La méthode du gradient de Brand et Sutterlin

Brand et Sutterlin [74,75] proposent une méthode globale permettant de vérifier la tenue à l'endurance d'une géométrie simple (arbre ou plaque) sollicitée par un chargement simple ou un peu plus complexe, comme la traction-torsion ou flexion-torsion en phase. Ces auteurs utilisent tout au long de leur cheminement des abaques, construits à partir d'un grand nombre de résultats expérimentaux recensés dans la littérature, de relations d'équivalence et d'un diagramme d'endurance (diagramme de Haigh).

Ils ont montré que pour rendre compte de l'effet d'entaille sur un grand nombre de résultats expérimentaux en fatigue, le gradient, noté χ , est la variable la mieux adaptée. Ce gradient χ est défini par la relation suivante :

$$\chi = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_{\max}} \frac{d\sigma}{dx} \quad (\text{II.2})$$

où σ_{\max} est la contrainte maximale réelle liée à la concentration de contrainte ($\sigma_{\max} = k_t \cdot \sigma^{\text{nom}}$), $\frac{d\sigma}{dx}$ est le gradient au sens mathématique et représente la pente (en valeur absolue) de la contrainte dans la direction x . La figure II.10 illustre cette définition du gradient χ pour une éprouvette cylindrique soumise à une sollicitation de traction. La valeur du gradient de contrainte ainsi défini pour différents cas de géométries et de sollicitations est indiquée figure II.11.

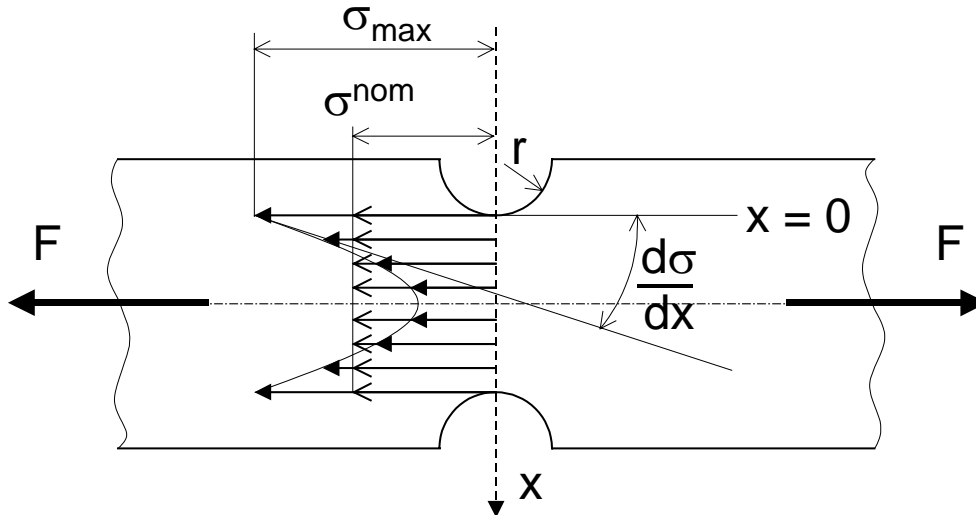


Figure II.10. Définition des quantités utilisées pour le calcul du gradient de contrainte défini par Brand et Sutterlin.

Sollicitations	Types de pièces	χ (mm^{-1})
TRACTION	Plaque	$\frac{2}{r}$
	Arbre	
FLEXION	Plaque	$\frac{2}{r} + \frac{2}{d}$
	Arbre	
TORSION	Arbre	$\frac{1}{r} + \frac{2}{d}$
	Arbre	
FLEXION	Arbre percé	$\frac{4}{r}$
TORSION	Arbre percé	$\frac{3}{r}$

Figure II.11. Valeur du gradient de contrainte χ pour différents cas de géométries et de sollicitations (d'après [74]).

Brand et Sutterlin donnent en outre un certain nombre de facteurs d'influence sur la tenue en fatigue qui sont :

- *Les caractéristiques mécaniques.* L'ensemble des résultats obtenus en flexion rotative sur éprouvette lisse (environ 500 résultats) leur permet d'établir une relation entre la limite d'endurance σ_D à 90% de probabilité de rupture et la résistance maximale à la traction R_m .

- *Le type de sollicitation.* Ils considèrent que les limites d'endurance des matériaux pour des sollicitations simples à contrainte moyenne nulle se déduisent de celles obtenues en flexion rotative par l'utilisation d'un coefficient de passage k_p (tableau II.5). Le choix d'un coefficient de passage indépendant des dimensions de la section sollicitée est maladroite car, comme nous l'avons vu précédemment, la limite d'endurance obtenue en flexion (rotative ou plane) est liée au diamètre de l'éprouvette qui modifie la valeur du gradient. Les valeurs du tableau n'ont donc pas un caractère général. Tout au mieux peuvent elles être utilisées pour des essais menés sur des éprouvettes identiques avec des sollicitations de natures différentes. Les auteurs reconnaissent d'ailleurs que ces coefficients sont contestables et ne les emploient pas par la suite.

limite d'endurance	coefficient k_p	
σ_D (traction)	= 0,9	$\times \sigma_D$ (flexion rotative)
σ_D (flexion plane)	= 1,05	
σ_D (torsion)	= 0,6	

Tableau II.5. Coefficients de passage k_p de la limite d'endurance en flexion rotative à celles obtenues pour d'autres sollicitations simples.

- *La dimension.* Les résultats expérimentaux sur éprouvettes lisses soumises à une flexion rotative ou à une flexion plane sont réunis sur un même graphique donnant le rapport k_e entre la limite d'endurance pour l'essai et la limite d'endurance du même matériau pour une éprouvette de référence (diamètre 6 mm). Le coefficient k_e est alors obtenu par lissage de l'ensemble des résultats en fonction du diamètre de l'éprouvette. Cette évolution est là encore directement liée à la présence d'un gradient. Les auteurs annoncent que ce coefficient k_e est hasardeux et n'en tiennent pas compte par la suite.
- *L'état de surface.* Il est bien connu que l'état de surface joue un rôle prononcé sur la tenue en fatigue. Un état de surface grossier facilite d'autant plus l'amorçage des fissures que les contraintes sont en général maximales en surface de pièce. Un coefficient k_s est déterminé à partir d'abaques ; il est fonction de la rugosité totale R_t et de la résistance maximale à la traction R_m . L'abaque a été construit à partir de résultats expérimentaux (figure II.12).
- *Les contraintes résiduelles.* La présence d'une contrainte résiduelle est supposée bénéfique à la tenue en fatigue (lorsqu'il s'agit d'une contrainte de compression). Les auteurs suggèrent, dans le cas où elle est parfaitement déterminée, de l'introduire sous forme d'un état de contrainte moyen.
- *Les facteurs particuliers* (fréquence, corrosion, température, etc.). Les auteurs proposent qu'en présence de facteurs particuliers, une étude spécifique à ceux-ci soit menée.

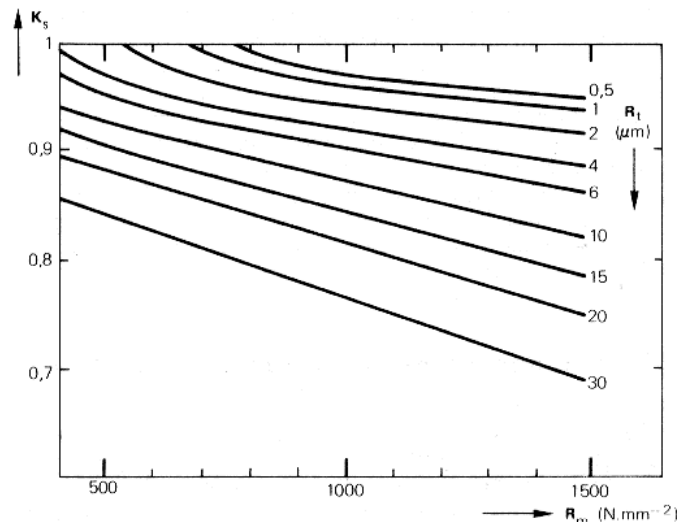


Figure II.12. Facteur d'influence k_s lié à l'état de surface en fonction de la rugosité R_t et de la résistance maximale à la traction R_m (d'après [74]).

- *L'entaille.* Les auteurs montrent que le gradient χ est le paramètre adéquat pour décrire l'effet d'entaille d'un grand nombre de résultats expérimentaux obtenus pour différentes sollicitations (traction, flexion et torsion) appliquées à des éprouvettes entaillées (312 résultats issus de la littérature). Ils définissent le coefficient d'adaptation dynamique δ_f , rapport de k_f sur k_t (équation II.3), préféré au paramètre q (équation II.1). Ils construisent alors un abaque reliant δ_f et χ pour différentes nuances d'acier. La valeur du gradient pour cet abaque est limitée à 10 mm^{-1} pour obtenir une meilleure corrélation.

$$\delta_f = \frac{k_f}{k_t} \quad (\text{II.3})$$

Parmi l'ensemble des facteurs d'influence définis par Brand et Sutterlin, seul le facteur lié à l'état de surface k_s est employé sous la forme d'un abaque à lui tout seul dans la méthode de dimensionnement. Les autres facteurs, et plus spécifiquement le coefficient d'adaptation dynamique δ_f , sont intégrés dans la construction de l'abaque d'adaptation dynamique. L'ensemble des résultats bibliographiques réunis par les auteurs leur a permis de construire un réseau de courbes donnant la limite d'endurance purement alternée réelle $\hat{\sigma}_D$ prenant en compte le coefficient de concentration de contrainte due à l'entaille (équation II.4), en fonction du gradient de contrainte χ et de la résistance maximale R_m du matériau considéré.

$$\hat{\sigma}_D = \sigma_D \cdot k_t \quad (\text{II.4})$$

Cette limite d'endurance $\hat{\sigma}_D$ est issue pour l'essentiel de résultats d'essais de traction et de flexion (rotative ou plane) alternées symétriques, exprimés à l'aide d'une contrainte normale. Lorsqu'il s'agit de résultats d'essais de torsion exprimés par une contrainte tangentielle, la limite d'endurance τ_D est ramenée à son équivalent au sens de Von Mises en contrainte normale (équation II.5). Cette opération est critiquable car ce rapport $\sqrt{3}$ entre la limite d'endurance de traction et celle de torsion n'est pas toujours vérifié en pratique.

$$\hat{\sigma}_D = \sqrt{3} \cdot \tau_D \cdot k_t \quad (II.5)$$

Les auteurs expliquent que les facteurs k_p et k_e , qui traduisent les influences du type de sollicitation et des dimensions respectivement, sont implicitement pris en compte dans le réseau de courbes puisqu'ils ont comme origine la présence du gradient de contrainte χ . C'est pour cette raison que les auteurs écartent ces coefficients d'influence dans leur méthode. La synthèse des résultats donnant $\hat{\sigma}_D$ en fonction du gradient χ et de la résistance maximale à la traction R_m est donnée sous forme de l'abaque présenté figure II.13 et par voie analytique décrite figure II.14.

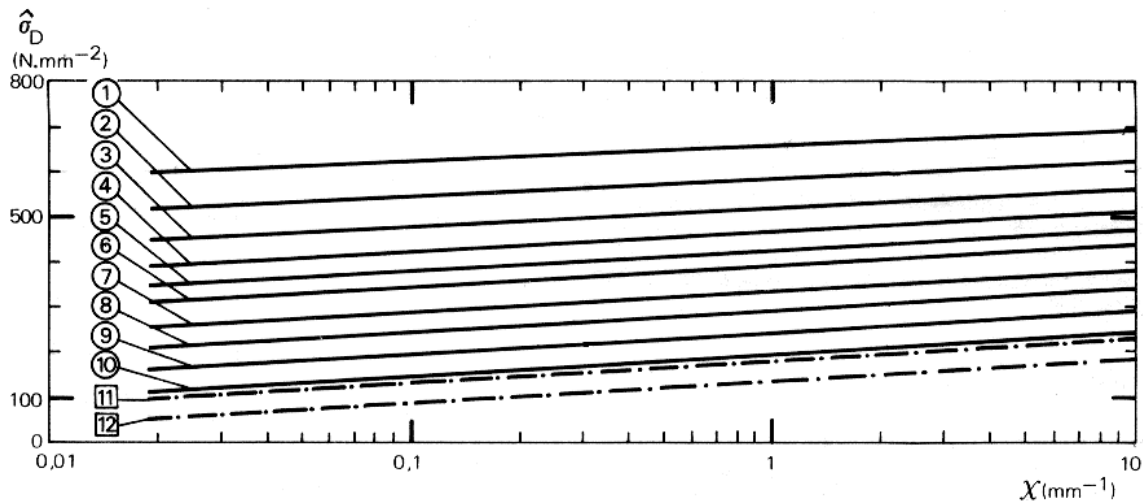


Figure II.13. Abaque donnant $\hat{\sigma}_D$ en fonction du gradient χ et de la résistance maximale à la traction R_m (d'après [74]).

Équation générale des courbes à 90 % :				Équation générale des courbes à 90 % :			
$\hat{\sigma}_D = a \log \chi + b$				$\hat{\sigma}_D = a \log \chi + b$			
$(\hat{\sigma}_D \text{ en N/mm}^2 - \chi \text{ en mm}^{-1})$				$(\hat{\sigma}_D \text{ en N/mm}^2 - \chi \text{ en mm}^{-1})$			
Réf. courbe	Classe acier (R_m en N . mm ⁻²)	a	b	Réf. courbe	Classe acier moulé (R_m en N . mm ⁻²)	a	b
①	$R_m \geq 1\,400$	100/3	655	⑪	$350 \leq R_m < 500$	140/3	180
②	$1\,200 \leq R_m < 1\,400$	110/3	585	⑫	$R_m < 350$	140/3	135
③	$1\,000 \leq R_m < 1\,200$	120/3	520				
④	$900 \leq R_m < 1\,000$	130/3	465				
⑤	$800 \leq R_m < 900$	130/3	430				
⑥	$700 \leq R_m < 800$	135/3	390				
⑦	$600 \leq R_m < 700$	135/3	335				
⑧	$500 \leq R_m < 600$	140/3	295				
⑨	$400 \leq R_m < 500$	140/3	245				
⑩	$R_m < 400$	140/3	195				

Figure II.14. Equations du réseau de courbes donnant $\hat{\sigma}_D$ en fonction du gradient χ et de la résistance maximale à la traction R_m (d'après [74]).

Après celle du gradient, Brand et Sutterlin introduisent une deuxième notion, celle de l'adaptation statique. Si l'adaptation dynamique se traduit par une augmentation de la limite d'endurance notée $\hat{\sigma}_D$ fonction du gradient de contrainte χ , l'adaptation statique est son

homologue en ce qui concerne les propriétés statiques du matériau. Les auteurs mettent en évidence, toujours à partir de données expérimentales, une augmentation de la résistance maximale à la traction R_m sur une pièce présentant une entaille et l'attribuent là aussi au gradient de contrainte. Ils notent \hat{R}_m la résistance maximale à la traction de l'éprouvette entaillée, définie en tant que contrainte nominale (effort maximal ramené à la section droite). Le coefficient d'adaptation statique δ_s (équation II.6) est alors défini comme le rapport de \hat{R}_m sur R_m (valeurs obtenues sur les éprouvettes entaillée et lisse respectivement). Il est donc fonction du gradient de contrainte χ .

$$\delta_s = \frac{\hat{R}_m}{R_m} \quad (II.6)$$

Le tableau II.6 ci-dessous rappelle les relations données par les auteurs.

$R_m \geq 1800 \text{ MPa}$	quel que soit χ	$\delta_s = 1$	$\hat{R}_m = R_m$
$R_m < 1800 \text{ MPa}$	$\chi \leq 0,03 \text{ mm}^{-1}$	$\delta_s = 1$	$\hat{R}_m = R_m$
	$0,03 < \chi \leq 4 \text{ mm}^{-1}$	$\delta_s = 0,25 \log \chi + 1,4$	$\hat{R}_m = R_m (0,25 \log \chi + 1,4)$
	$4 < \chi \leq 10 \text{ mm}^{-1}$	$\delta_s = 0,25 \log 4 + 1,4$	$\hat{R}_m = 1,55 \cdot R_m$
	$\chi > 10 \text{ mm}^{-1}$	nécessite de redessiner la pièce	

Tableau II.6. Relation entre \hat{R}_m et R_m en fonction du gradient de contrainte (d'après [74]).

Afin de généraliser la méthode aux cas de sollicitations combinées en phase, telles que celles de flexion-torsion ou de traction-torsion, la notion d'équivalence au sens de Von Mises est appliquée aux calculs du gradient des contraintes moyennes $\chi_{\text{méc}}$ (équation II.7), du gradient des contraintes alternées $\chi_{\text{aéc}}$ (équation II.8), de la résistance maximale à la traction en présence d'entaille $\hat{R}_{\text{méc}}$ (équation II.9) et de la limite d'endurance réelle en présence d'entaille $\hat{\sigma}_{\text{Déc}}$ (équation II.10).

$$\chi_{\text{méc}} = \left[\frac{\left(\frac{\sigma_{\text{mtraction}} \chi_{\text{traction}} + \sigma_{\text{mflexion}} \chi_{\text{flexion}}}{\sigma_{\text{mtraction}} + \sigma_{\text{mflexion}}} \right)^2 + \frac{3}{\beta^2} \chi_{\text{torsion}}^2}{1 + \frac{3}{\beta^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (II.7)$$

où :

- χ_{traction} et $\sigma_{\text{mtraction}}$ sont respectivement le gradient et la contrainte moyenne de traction,
- χ_{flexion} et σ_{mflexion} représentent le gradient et la contrainte moyenne de flexion,
- χ_{torsion} est le gradient de contrainte de torsion,
- $\beta = (\sigma_{\text{mtraction}} + \sigma_{\text{mflexion}}) / \tau_m$, τ_m étant la contrainte moyenne de torsion (si elle est nulle, une valeur proche de zéro lui est attribuée).

$$\chi_{a\acute{e}q} = \left[\frac{\left(\frac{\sigma_{\text{atraction}} \chi_{\text{traction}} + \sigma_{\text{aflexion}} \chi_{\text{flexion}}}{\sigma_{\text{atraction}} + \sigma_{\text{aflexion}}} \right)^2 + \frac{3}{\alpha^2} \chi_{\text{torsion}}^2}{1 + \frac{3}{\alpha^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.8})$$

où :

- χ_{traction} et $\sigma_{\text{atraction}}$ sont le gradient et l'amplitude de la contrainte de traction,
- χ_{flexion} et σ_{aflexion} sont le gradient et l'amplitude de la contrainte de flexion,
- χ_{torsion} est le gradient de la contrainte de torsion,
- $\alpha = (\sigma_{\text{atraction}} + \sigma_{\text{aflexion}}) / \tau_a$, τ_a étant l'amplitude de la contrainte de torsion (si τ_a est nulle, une valeur proche de zéro lui est affectée).

$$\hat{R}_{\text{m\acute{e}q}} = R_m (0,25 \log \chi_{\text{m\acute{e}q}} + 1,4) \quad (\text{II.9})$$

$$\hat{\sigma}_{\text{D\acute{e}q}} = a \log \chi_{\text{a\acute{e}q}} + b \quad (\text{II.10})$$

Cette construction basée sur des notions d'équivalence et appliquée au cas d'une sollicitation simple redonne les formules identiques à celles préconisées précédemment dans ce cas. A ce stade toutes les données nécessaires au dimensionnement en fatigue, par la méthode du gradient, d'une pièce soumise à des sollicitations simples ou combinées en phase sont établies. L'aboutissement de la méthode se traduit par la détermination d'un diagramme d'endurance (diagramme de Haigh), appelé communément diagramme du CETIM et présenté figure II.15. Ce diagramme est construit à l'aide de l'établissement de $\hat{\sigma}_{\text{D\acute{e}qus}}$, limite d'endurance équivalente usuelle définie par l'équation II.11 (c'est à dire avec prise en compte de la rugosité) et de $\hat{R}_{\text{m\acute{e}q}}$.

$$\hat{\sigma}_{\text{D\acute{e}qus}} = \hat{\sigma}_{\text{D\acute{e}q}} \cdot K_s(R_m, R_t) \quad (\text{II.11})$$

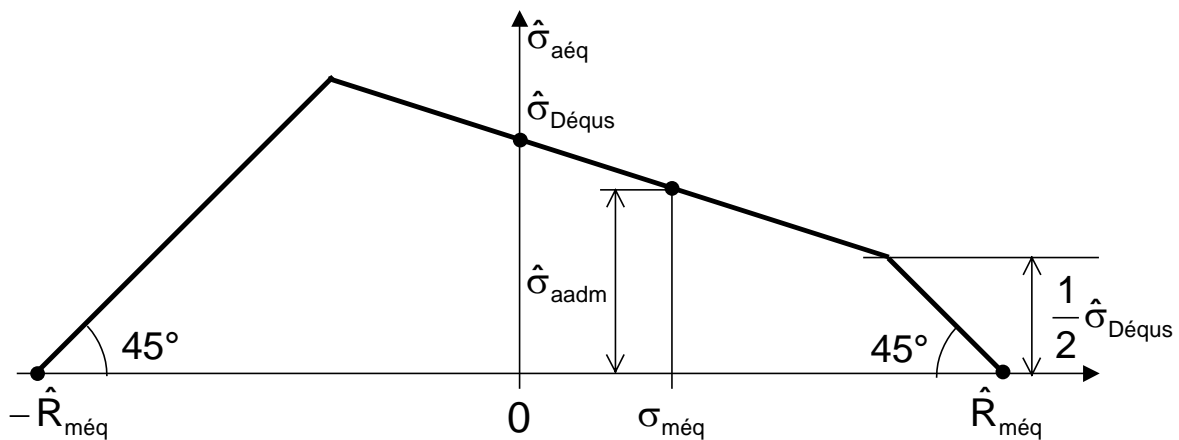


Figure II.15. Diagramme d'endurance du CETIM construit à l'aide des valeurs $\hat{\sigma}_{\text{D\acute{e}qus}}$ et $\hat{R}_{\text{m\acute{e}q}}$ (d'après [74]).

Dans le repère contrainte moyenne équivalente–amplitude de la contrainte équivalente $\hat{\sigma}_{\text{m}\acute{e}\text{q}} - \hat{\sigma}_{\text{a}\acute{e}\text{q}}$, le cycle équivalent au sens de Von Mises de la sollicitation considérée se reporte sur le diagramme du CETIM en fonction de la contrainte moyenne équivalente $\sigma_{\text{m}\acute{e}\text{q}}$ définie par l'équation II.12. Le diagramme permet alors de connaître l'amplitude admissible équivalente $\hat{\sigma}_{\text{aadm}}$.

$$\sigma_{\text{m}\acute{e}\text{q}} = \sqrt{(\sigma_{\text{mtraction}} + \sigma_{\text{mflexion}})^2 + 3\tau_{\text{m}}^2} \quad (\text{II.12})$$

Nous remarquons ici que le calcul de la contrainte moyenne équivalente ne prend pas en compte la présence des concentrations de contrainte. En effet, aucun coefficient relatif aux concentrations de contraintes rencontrées n'est associé aux différents termes des contraintes moyennes considérées.

La méthode du gradient, bien qu'elle semble complexe, suit un algorithme simple et précis. La connaissance de la géométrie de la pièce à dimensionner (diamètre D , rayon d'entaille r , ...), du chargement (contraintes moyennes et amplitudes des contraintes de chacune des sollicitations) et du matériau (R_m) permet de déterminer le gradient équivalent des contraintes alternées $\chi_{\text{a}\acute{e}\text{q}}$ et moyennes $\chi_{\text{m}\acute{e}\text{q}}$, puis la résistance maximale à la traction adaptée $\hat{R}_{\text{m}\acute{e}\text{q}}$ et la limite d'endurance équivalente $\hat{\sigma}_{\text{D}\acute{e}\text{q}}$. La prise en compte de l'état de surface à l'aide du facteur d'influence K_s permet alors de calculer la limite d'endurance équivalente usuelle $\hat{\sigma}_{\text{D}\acute{e}\text{qus}}$. A partir de toutes ces données, le diagramme d'endurance équivalent est établi, qui permet de dimensionner la pièce en terme de chargement admissible ou de vérifier sa tenue en fatigue au seuil de l'endurance.

La méthode du gradient proposée par Brand et Sutterlin est issue de l'analyse d'un grand nombre de résultats expérimentaux. Cela leur a permis de définir des abaques, des règles de corrélation ayant comme donnée d'entrée et point commun la valeur du gradient au sens où les auteurs le définissent. Ils proposent de nombreuses équivalences, toutes basées sur le critère de résistance de Von Mises, qui permettent de traiter des sollicitations combinées en phase superposées à un chargement moyen. Ce cas de figure représente le cas le plus complexe de sollicitation que la méthode puisse traiter. Même si certaines critiques peuvent en être faites, la méthode proposée a eu à l'époque l'avantage de proposer une solution au dimensionnement en fatigue de pièces plus ou moins complexes présentant des concentrations de contrainte liées à des accidents géométriques nécessaires à la conception. Les points les plus discutables de la méthode sont les suivants :

- L'utilisation des équivalences au sens de Von Mises. De nombreux travaux ont montré que l'utilisation d'une contrainte équivalente de Von Mises est inadaptée au calcul en fatigue multiaxiale. De là d'ailleurs le fait que les critères de fatigue multiaxiaux sont très différents des critères de résistance traditionnels.
- Le dimensionnement de pièces soumises à une sollicitation de torsion nécessite de passer par la construction d'un diagramme d'endurance de traction-compression dont la modélisation est basée sur des contraintes normales. L'utilisation d'un tel diagramme n'est pas conforme au comportement observé en torsion. L'influence en fatigue de contraintes tangentielles moyennes est en effet éloignée de celle de contraintes normales moyennes.

L'objectif initial est de situer tout cycle multiaxial de contrainte vis à vis d'une limite de fatigue à N cycles, tout en prenant en compte la présence lorsqu'il y a lieu d'un gradient de contrainte car celui-ci joue un rôle bénéfique en fatigue. La méthode du gradient apparaît alors somme toute restrictive en raison du nombre réduit de types de sollicitation qu'elle est capable de traiter. Au contraire l'utilisation d'un critère multiaxial de fatigue permet de traiter a priori tout type de chargement cyclique.

II.3.2 La proposition de Papadopoulos

Papadopoulos propose de prendre en compte le gradient de la contrainte normale dans le critère multiaxial de fatigue de Matake [72]. D'après ce critère, le plan critique est celui où l'amplitude de la contrainte de cisaillement est maximale (cf. chapitre I, paragraphe I.2.2.8). Il a donc ajouté un terme de gradient au critère défini par Matake en 1977. Sa proposition, dans le cadre de notre démarche, est plus abordable car transposable à d'autres critères de fatigue.

Le gradient de contrainte, noté G dans la définition de Papadopoulos, et que nous appelons gradient spatial ou gradient géométrique désigne le module du vecteur gradient de la contrainte normale σ à un plan donné. Il est établi à l'aide des dérivées partielles de σ par rapport aux coordonnées du repère global. Sa définition est donnée par l'équation (II.13).

$$G = \sqrt{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)^2} \quad (\text{II.13})$$

Papadopoulos étudie et montre l'influence du gradient des deux contraintes présentes dans le formalisme du critère de Matake. Sa publication nous a servi de support pour mettre en évidence l'influence du gradient de contrainte du paragraphe II.1 et pour établir les propositions de prise en compte du gradient dans les critères de Robert et de Fogue, mises en œuvre dans le paragraphe suivant.

Comme montré précédemment, le gradient de contrainte est identique en tout point d'une section droite d'une éprouvette lisse soumise à une sollicitation de flexion ou de torsion, ceci à un instant donné et tant que la réponse de l'éprouvette reste élastique. Nous considérons deux types d'essais de flexion : la flexion à moment constant (flexion quatre points) et la flexion (rotative) à moment non constant.

La torsion met en jeu une contrainte tangentielle répartie linéairement sur un rayon de la section droite de l'éprouvette. La flexion quant à elle met en jeu une contrainte normale dont la distribution est linéaire sur un diamètre de la section droite. A partir de ces deux sollicitations simples différentes, nous avons étudié l'influence du gradient des deux types de contraintes (normale et tangentielle). Papadopoulos a réuni des résultats bibliographiques d'essais comportant ce type de sollicitations de façon à mettre en évidence l'effet du gradient en fonction des dimensions transversales des éprouvettes sollicitées (rayon, épaisseur). Il a ainsi regroupé, comme nous l'avons présenté sur les figures II.2 et II.6, les résultats de Massonnet [68] en flexion rotative à moment non constant et ceux de Pogorestskii et Karpenko [71] en flexion à moment constant. Ces différents auteurs ont fait varier le rayon de leurs éprouvettes lisses pour mettre en évidence l'influence bénéfique du gradient de contrainte. Papadopoulos donne également d'autres résultats en flexion rotative obtenus par Moore et Morkovin [76]. Ces derniers sont présentés figure II.16.

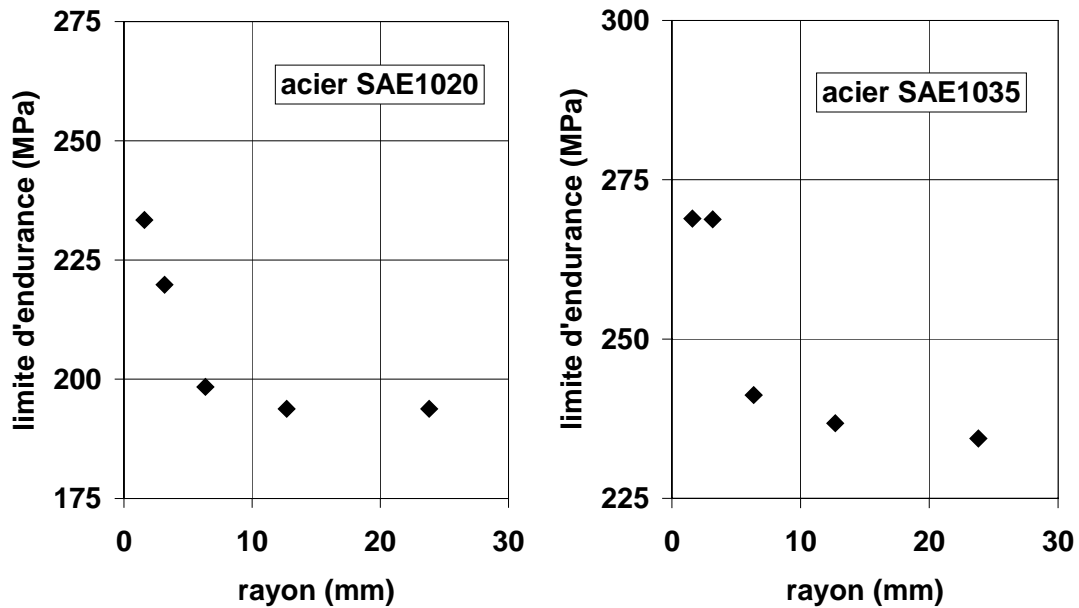


Figure II.16. Limites d'endurance de flexion rotative en fonction du rayon des éprouvettes. Résultats obtenus par Moore et Morkovin (d'après Papadopoulos [72]).

Papadopoulos considère que le gradient de la contrainte tangentielle n'a pas d'influence sur la limite d'endurance en torsion. Il le justifie en utilisant au départ un résultat bien connu en fatigue : la contrainte tangentielle moyenne n'a pas, ou très peu, d'influence sur l'amplitude de la limite d'endurance en torsion. Nous avons déjà évoqué au premier chapitre ce constat expérimental mis en évidence par Smith [39]. De fait l'amplitude de la contrainte tangentielle et elle seule joue un rôle dans le mécanisme d'endommagement au cours de l'essai de torsion. L'ajout d'une composante moyenne de torsion à la contrainte tangentielle alternée modifie le gradient de la contrainte globale de cisaillement (somme de la partie moyenne et de la partie alternée) mais conduit à la même limite d'endurance, en terme d'amplitude, que celle enregistrée sans contrainte moyenne de cisaillement. Le gradient de la contrainte tangentielle globale est donc différent d'un cas à l'autre même si l'amplitude est la même. Papadopoulos s'appuie sur ce raisonnement pour justifier la non-influence du gradient de la contrainte tangentielle. Il est à noter que si on ne tient compte que de la seule contrainte tangentielle qui joue un rôle en fatigue (la contrainte tangentielle alternée), la non influence de son gradient reste à démontrer.

Les résultats trop peu nombreux de Massonnet [68] obtenus en torsion alternée sur éprouvettes lisses, ne permettent pas de vérifier la non influence du gradient de la contrainte tangentielle. Cependant ses résultats sur éprouvettes entaillées soumises à une torsion alternée montrent une influence bénéfique du gradient (figure II.4). Si l'on fait l'hypothèse de l'absence d'influence du gradient des contraintes tangentielles, il faut attribuer cet effet bénéfique observé par Massonnet au gradient des contraintes normales générées par la sollicitation sur certains plans physiques (tout état de contraintes génère d'une manière générale des contraintes normales et tangentielles sur tout plan physique, tributaires de son orientation propre). L'hypothèse, que nous retiendrons par la suite, de la non-influence du gradient des contraintes de cisaillement reste néanmoins à valider expérimentalement.

Dans la formulation du critère de Mataka, Papadopoulos propose d'introduire un terme supplémentaire qui traduit l'influence du gradient de contrainte. Le critère de Mataka, rappelons le, est basé sur une approche de type plan critique. Sa formulation utilise des quantités relatives à un plan physique : les contraintes normale et tangentielle. Le plan critique est choisi comme étant celui où l'amplitude de la contrainte tangentielle est

maximale. La proposition initiale de Matake, valable pour tout cycle de contraintes multiaxiales, est donnée par l'expression de sa fonction de fatigue E_{MT} (équation II.14) :

$$E_{MT} = \frac{\tau_{ha} + \alpha \sigma_{hhmax}}{\gamma} \quad (II.14)$$

σ_{hhmax} est la contrainte normale maximale et τ_{ha} est l'amplitude de la contrainte tangentielle qui agissent sur le plan critique. Les coefficients α et γ sont définis lors du calage du critère (équations II.15). Cette opération consiste à écrire que le critère est vérifié ($E_{MT} = 1$) pour les essais simples de traction alternée symétrique σ_{-1} et de torsion alternée symétrique τ_{-1} à la limite d'endurance. On obtient ainsi :

$$\alpha = 2 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - 1 \quad (II.15)$$

$$\gamma = \tau_{-1}$$

Papadopoulos montre que le critère de Matake appliqué à une sollicitation de flexion-torsion alternée symétrique en phase conduit à l'équation de l'arc d'ellipse de Gough, Pollard et Clenshaw. En effet pour ce chargement, le tenseur des contraintes est le suivant :

$$[\sigma(t)] = \begin{bmatrix} \sigma_a & \tau_a & 0 \\ \tau_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sin \omega t \quad (II.16)$$

A la limite de fatigue ($E_{MT} = 1$), le critère de Matake s'écrit, pour ce type d'états de contraintes périodiques :

$$\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{4} + \tau_a^2} + \left(2 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - 1\right) \frac{\sigma_a}{2} = \tau_{-1} \quad (II.17)$$

L'équation II.17 correspond à l'arc d'ellipse de Gough, Pollard et Clenshaw dans laquelle la limite d'endurance en traction alternée symétrique σ_{-1} a été substituée à celle de flexion f_{-1} (cf. chapitre I, paragraphe I.2.1.3, équation I.4), soit :

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right) \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(2 - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right) \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} = 1 \quad (II.18)$$

Papadopoulos introduit dans la formulation du critère de Matake un terme de gradient obtenu par le produit du gradient G (relation II.13), calculé lorsque la contrainte normale au plan critique atteint sa valeur maximale, et de cette contrainte normale maximale. Pour une raison d'homogénéité, il prend la racine carrée du terme de gradient. Dans le cas où la contrainte normale maximale du plan critique est négative (cas où ce plan est soumis à une compression tout au long du cycle), elle est considérée comme étant nulle, ce qui revient à poser qu'il n'y a alors pas d'effet de gradient. Un coefficient β permet de pondérer l'influence du terme de gradient dans la nouvelle fonction de fatigue E_{PAG} du critère, laquelle prend donc la forme suivante :

$$E_{PAG} = \frac{\tau_{ha} + \alpha \sigma_{hhmax} - \beta \sqrt{G \langle \sigma_{hhmax} \rangle}}{\gamma} \quad (II.19)$$

avec :

$$G = \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial z}\right)^2} \quad (\text{II.20})$$

et où : $\langle \sigma_{hh\max} \rangle = \sigma_{hh\max}$ si $\sigma_{hh\max} > 0$ et $\langle \sigma_{hh\max} \rangle = 0$ si $\sigma_{hh\max} \leq 0$.

Les deux constantes α et γ de cette nouvelle formulation sont identiques à celles du critère initial de Matake car, pour l'essai de torsion alternée symétrique, la contrainte normale maximale est nulle sur le plan de cisaillement maximal (donc le terme de gradient l'est également) et pour l'essai de traction-compression alternée symétrique le champ de contraintes étant uniforme, le gradient est nul. α et γ sont donc toujours données par les relations II.15. La constante β est déterminée à l'aide de la limite d'endurance f_{-1} du matériau en flexion alternée symétrique et du rayon R_0 de l'éprouvette utilisée pour déterminer cette limite d'endurance. L'éprouvette cylindrique de diamètre $2R_0$ soumise à une sollicitation de flexion alternée symétrique (flexion à moment constant, figure II.17), conduit à une répartition des contraintes exprimées par le tenseur $[\sigma]_{x,y,z}$ (équation II.21) :

$$[\sigma]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} = \frac{PL}{I_{yy}} x \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

où I_{yy} représente l'inertie de la section par rapport à l'axe y (inertie constante tout au long de la poutre).

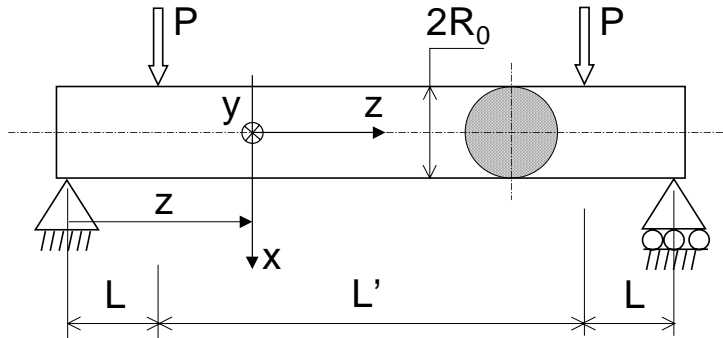


Figure II.17. Flexion à moment constant ou flexion 4 points d'une éprouvette lisse.

Le plan critique est celui sur lequel l'amplitude de la contrainte de cisaillement est maximale. S'agissant ici d'une sollicitation alternée symétrique, l'amplitude maximale de cisaillement coïncide avec la contrainte tangentielle maximale au cours du cycle. Celle-ci est maximale sur tous les plans inclinés à 45° par rapport à l'axe z . Sur ces plans la contrainte normale maximale $\sigma_{hh\max}$ s'exprime en fonction de l'abscisse x par la relation suivante :

$$\sigma_{hh\max} = \frac{\sigma_{zz}}{2} = \frac{PL}{2I_{yy}} x \quad (\text{II.22})$$

Les dérivées partielles de $\sigma_{hh\max}$ par rapport à x , y et z sont données ci-dessous :

$$\frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial x} = \frac{PL}{2I_{yy}} = \frac{\sigma_{zz}}{2x} \quad (II.23)$$

$$\frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial z} = 0$$

A la surface de l'éprouvette, c'est à dire en l'abscisse $x = R_0$, la contrainte normale σ_{zz} correspond à la limite d'endurance en flexion alternée symétrique f_{-1} . La valeur du gradient géométrique à la surface de l'éprouvette est donc donnée par :

$$G = \frac{f_{-1}}{2R_0} \quad (II.24)$$

Le calage du critère en flexion alternée symétrique pour un essai à moment constant ($E = 1$), conduit ainsi à la relation suivante :

$$\frac{\frac{f_{-1}}{2} + \alpha \frac{f_{-1}}{2} - \beta \sqrt{\frac{f_{-1}}{2R_0} \frac{f_{-1}}{2}}}{\gamma} = 1 \quad (II.25)$$

On obtient la valeur de β en remplaçant les termes α et γ par leurs expressions (II.15) :

$$\beta = 2\sqrt{R_0} \left(\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} \right) \quad (II.26)$$

La détermination de β peut être aussi réalisée à partir d'un essai de flexion rotative à moment non constant (variation linéaire) dont le schéma de montage est présenté figure II.18.

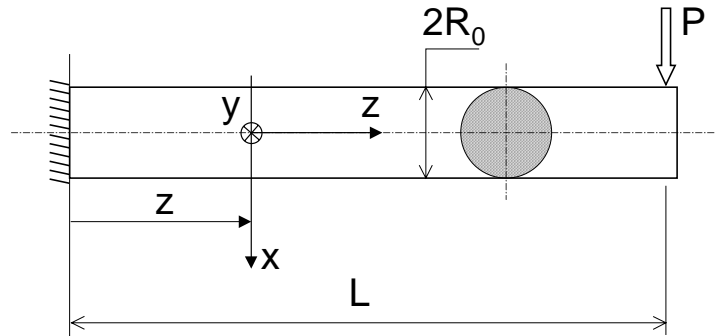


Figure II.18. Flexion à moment non constant (variation linéaire) d'une éprouvette lisse.

En notant f'_{-1} la limite de fatigue au seuil de l'endurance d'un tel essai, le calage aboutit ici à l'expression suivante de la constante β :

$$\beta = 2 \frac{\sqrt{R_0}}{\left(\frac{R_0^2}{L^2} + 1 \right)^{1/4}} \left(\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{\tau_{-1}}{f'_{-1}} \right) \quad (II.27)$$

La valeur de β dépend non seulement du rayon R_0 de l'éprouvette qui a servi à déterminer la limite d'endurance f'_{-1} mais également de sa longueur L . Cependant pour un

rapport R_0/L faible, les valeurs de calage obtenues en flexion à moment constant et en flexion à moment non constant sont pratiquement identiques.

Afin de comparer ultérieurement les formulations présentées dans ce chapitre, nous définissons la fonction de fatigue E_{PAG} du critère de Mataka modifié par Papadopoulos comme étant la fonction de fatigue établie par l'expression (II.19), soit :

$$E_{PAG} = \frac{\tau_{ha} + \alpha \sigma_{hhmax} - \beta \sqrt{G \langle \sigma_{hhmax} \rangle}}{\gamma} \quad (II.28)$$

Si l'idée et la mise en œuvre de la prise en compte du gradient de contrainte sont ingénieuses, il n'en reste pas moins que l'utilisation du critère de Mataka comme outil d'application est maladroite pour les raisons déjà évoquées au paragraphe I.3.5 du premier chapitre. Il s'agit là de la seule critique quant à cette proposition de critère intégrant le gradient de contrainte de Papadopoulos, si l'on excepte la justification de la non-influence du gradient de la contrainte tangentielle. En effet le choix du plan critique n'est pas en accord avec l'expression de la fonction de fatigue. De ce fait, lorsque plusieurs plans physiques sont critiques au sens du critère (même amplitude maximale de la contrainte tangentielle), du choix du plan de référence parmi tous ces plans dépend la valeur de la fonction de fatigue. En effet la fonction de fatigue du critère peut être très différente d'un plan à l'autre, même si les deux sont identiquement critiques au sens du critère. L'interprétation faite à partir de cette fonction de fatigue peut alors être complètement inversée, ce qui n'est pas satisfaisant.

Lorsque le critère est appliqué à des essais combinés de flexion-torsion alternée symétrique en phase, d'amplitudes respectives σ_a et τ_a , et menés sur des éprouvettes de rayon R_0 , la validité du critère conduit à l'expression suivante :

$$\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{4} + \tau_a^2} + \alpha \frac{\sigma_a}{2} - \frac{\beta \sigma_a}{2\sqrt{R_0}} = \gamma \quad (II.29)$$

Papadopoulos a développé l'influence du gradient de la contrainte normale σ_{hhmax} , sur ce type de sollicitations. La contrainte normale sur un plan physique quelconque provient en général à la fois de la sollicitation de flexion et de celle de torsion. Or le terme relatif au gradient de contrainte, $\frac{\beta \sigma_a}{2\sqrt{R_0}}$, ne fait apparaître du fait de la définition du plan critique que la seule composante de flexion. Les propositions, que nous donnons dans ce qui suit pour les critères de Robert et de Fogue, remédient implicitement à ce défaut de par leur formalisme.

De plus si nous développons l'équation II.29, ceci en introduisant les expressions de chacune des constantes α , β et γ , nous aboutissons dans un premier temps à l'équation II.30 qui, par simplification, coïncide avec le critère initial de Mataka (équation II.31) calé sur les essais de flexion alternée symétrique (f_{-1}) et de torsion alternée symétrique (τ_{-1}).

$$\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{4} + \tau_a^2} + (2 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - 1) \frac{\sigma_a}{2} - 2\sqrt{R_0} (\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{\tau_{-1}}{f_{-1}}) \frac{\sigma_a}{2\sqrt{R_0}} = \tau_{-1} \quad (II.30)$$

$$\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{4} + \tau_a^2} + (2 \frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} - 1) \frac{\sigma_a}{2} = \tau_{-1} \quad (II.31)$$

Papadopoulos explique qu'après quelques manipulations algébriques sur l'équation II.30, il retrouve l'expression du quadrant d'ellipse de Gough, Pollard et Clenshaw (cf chapitre I, paragraphe I.2.1.3, équation I.4), ce qui constitue pour lui une démonstration de la validité de sa formule. Il n'en reste pas moins qu'il ne présente pas la simplification de l'équation II.30 donnée par l'équation II.31. Cette dernière montre tout simplement que la prise en compte du gradient de contrainte proposée par Papadopoulos est équivalente au critère de Mataka calé sur la limite de fatigue de flexion alternée symétrique f_{-1} au lieu de celle de traction-compression σ_{-1} . En fait, le passage de l'équation II.31 à l'expression du quadrant d'ellipse de Gough, Pollard et Clenshaw donnée ci-dessous est alors trivial au regard des équations II.17 et II.18 vues précédemment.

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right)\left(\frac{\sigma_a}{f_{-1}}\right)^2 + \left(2 - \frac{f_{-1}}{\tau_{-1}}\right)\frac{\sigma_a}{f_{-1}} = 1 \quad (\text{II.32})$$

Cette particularité (critère de Mataka calé sur la limite de fatigue en flexion f_{-1}) de la proposition de Papadopoulos d'intégration du gradient n'est pas spécifique aux essais de flexion-torsion alternées symétriques en phase ; elle s'applique à tout essai de flexion-torsion, quel qu'il soit (avec contraintes moyennes, déphasages), à la simple condition que l'ensemble des essais, ceux de calage compris, soient réalisés sur des éprouvettes de même rayon R_0 .

II.4 Propositions basées sur les travaux de Papadopoulos

Nous avons intégré la prise en compte du gradient de contrainte dans les critères de Robert et de Fogue en introduisant dans l'expression des indicateurs d'endommagement de chacun d'entre eux un terme semblable dans le principe à celui employé par Papadopoulos mais adapté à leur formalisme propre. Les hypothèses utilisées pour cette transformation des critères sont essentiellement celles posées précédemment, c'est à dire :

- Seules les contraintes normales sont concernées par le gradient de contrainte. L'effet du gradient des contraintes de cisaillement est supposé ne pas affecter le comportement en fatigue du matériau. Il est en fait négligé faute de données expérimentales suffisantes attestant du contraire. Cette hypothèse reste donc à confirmer expérimentalement.
- Le terme relatif à la contrainte normale et utilisé dans l'expression du terme de gradient respecte le formalisme initial du critère. Il s'agit du gradient de la contrainte normale à l'instant t pour le critère de Robert (critère construit à partir de grandeurs temporelles des contraintes) et du gradient de la contrainte normale maximale pour le critère de Fogue (critère bâti à partir de caractéristiques des contraintes définies sur l'ensemble du cycle).
- Les limites de fatigue utilisées pour le calage des critères sont celles obtenues sur des éprouvettes lisses ne présentant pas de concentration de contrainte, et dont la principale caractéristique géométrique nécessaire est le rayon.

II.4.1 Prise en compte du gradient de contrainte dans le critère de Robert

II.4.1.1 Formalisme du critère

La proposition consiste à introduire l'influence du gradient de contrainte dans le formalisme du critère de Robert (cf. chapitre I, paragraphe I.2.2.15) sous la forme d'un terme

additionnel dans l'indicateur d'endommagement par plan E_h . Sur un plan de normale h , nous introduisons un terme correctif lié au gradient, similaire dans son principe à la proposition de Papadopoulos. La démarche globale du critère reste inchangée : l'indicateur d'endommagement par plan étant défini, la fonction de fatigue correspond à la maximisation de celui-ci sur l'ensemble des plans possibles. Le terme supplémentaire correspond à la racine carrée du produit du gradient géométrique de la contrainte normale $G(t)$ par cette même contrainte $\sigma_{hh}(t)$, l'un et l'autre des deux termes étant définis à l'instant t . L'indicateur d'endommagement par plan du critère modifié de Robert est alors défini par l'expression suivante :

$$E_h = \text{Max}_t \left(\frac{\tau_{ha}(t) + \alpha \sigma_{hha}(t) + \beta \sigma_{hhm} + \delta \sqrt{G(t) \langle \sigma_{hh}(t) \rangle}}{\theta} \right) \quad (\text{II.33})$$

où $G(t)$, gradient géométrique de la contrainte normale $\sigma_{hh}(t)$ au plan physique de normale h , est défini à l'instant t par :

$$G(t) = \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial z} \right)^2} \quad (\text{II.34})$$

La fonction de fatigue du critère modifié de Robert, que nous notons E_{RBG} , correspond à la valeur maximale de l'indicateur d'endommagement : elle est atteinte sur le plan critique.

$$E_{\text{RBG}} = \text{Max}_h (E_h) \quad (\text{II.35})$$

II.4.1.2 Calage du critère

Le calage d'un critère consiste à déterminer les différentes constantes qui figurent dans sa formulation. Pour cela il suffit d'écrire que le critère est vérifié ($E_{\text{RBG}} = 1$) pour chacun des essais simples nécessaires (ici, il s'agit en général des essais de traction alternée, de traction répétée, de flexion alternée et de torsion). La mise en place de cette vérification donne lieu à un système de quatre équations à quatre inconnues, qui sont les quatre constantes du critère. Concernant le gradient de la contrainte normale, seuls les essais de flexion et de torsion donnent un terme de gradient non nul, tandis qu'une sollicitation de traction, alternée ou répétée, procure un gradient nul, le champ de contraintes étant uniforme en l'absence de concentration de contrainte.

Le calage du critère nécessite donc quatre essais de fatigue puisque quatre constantes sont à déterminer (α , β , θ et δ). Les limites de fatigue les plus courantes et susceptibles d'être utilisées au seuil de l'endurance sont au nombre de cinq, à savoir :

- la limite de fatigue en traction alternée symétrique σ_{-1} ,
- la limite de fatigue en traction répétée σ_0 ,
- la limite de fatigue en torsion alternée symétrique τ_{-1} ,
- la limite de fatigue en flexion alternée symétrique f_{-1} (flexion à moment constant),
- la limite de fatigue en flexion répétée f_0 (flexion à moment constant).