

Le tableau II.7 suivant récapitule les cinq possibilités envisageables de calage du critère. Parmi celles-ci les deux premières ont été réalisées. L'ensemble des calculs conduisant à la détermination des constantes est regroupé en annexe C.

N° calage	σ_{-1}	σ_0	τ_{-1}	f_{-1}	f_0
1	X	X	X	X	
2	X		X	X	X
3	X	X	X		X
4	X	X		X	X
5		X	X	X	X

Tableau II.7. Les différentes possibilités de calage du critère.

a) Résultats du premier calage ($\sigma_{-1}, \sigma_0, \tau_{-1}, f_{-1}$)

Les constantes déterminées lors de ce premier calage sont données par les équations II.36 à II.39. La dernière constante δ relative au terme de gradient nécessite la connaissance du rayon R_0 des éprouvettes employées expérimentalement pour définir la limite de fatigue en flexion alternée symétrique f_{-1} (à moment constant) et en torsion alternée symétrique τ_{-1} .

$$\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_{-1} f_{-1}^2}{f_{-1} - \tau_{-1}}} \quad (\text{II.36})$$

$$\alpha = \frac{\theta}{\sigma_{-1}} - \frac{\sigma_{-1}}{4\theta} \quad (\text{II.37})$$

$$\beta = \frac{2\theta}{\sigma_0} - \frac{\sigma_0}{8\theta} - \alpha \quad (\text{II.38})$$

$$\delta = \sqrt{R_0} \left(\frac{2\theta}{f_{-1}} - \frac{\theta}{\tau_{-1}} - \alpha \right) \quad (\text{II.39})$$

b) Résultats du second calage ($\sigma_{-1}, \tau_{-1}, f_{-1}, f_0$)

Les constantes sont ici exprimées par les équations II.40 à II.43. Les éprouvettes servant à la détermination des limites de fatigue f_{-1} , f_0 et τ_{-1} , respectivement en flexion alternée symétrique, en flexion répétée (ces deux flexions étant à moment constant) et en torsion alternée symétrique, doivent avoir nécessairement le même rayon R_0 .

$$\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_{-1} f_{-1}^2}{f_{-1} - \tau_{-1}}} \quad (\text{II.40})$$

$$\alpha = \frac{\theta}{\sigma_{-1}} - \frac{\sigma_{-1}}{4\theta} \quad (\text{II.41})$$

$$\delta = \sqrt{R_0} \left(\frac{2\theta}{f_{-1}} - \frac{\theta}{\tau_{-1}} - \alpha \right) \quad (\text{II.42})$$

$$\beta = \frac{2\theta}{f_0} - \frac{f_0}{8\theta} - \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} - \alpha \quad (\text{II.43})$$

II.4.2 Prise en compte du gradient de contrainte dans le critère de Fogue

II.4.2.1 Formalisme du critère

La démarche employée est semblable en tout point à celle utilisée pour le critère de Robert. L'ajout d'un terme intégrant le gradient géométrique de la contrainte normale est opéré dans le formalisme de l'indicateur d'endommagement par plan E_h du critère de Fogue (cf. chapitre I, paragraphe I.2.3.12). L'ensemble des termes contenus dans E_h sont des caractéristiques du cycle multiaxial de contrainte indépendantes du temps et propres au plan considéré (soit une amplitude, soit une valeur moyenne). Ces termes restent inchangés. Un élément est ajouté comme terme de gradient à l'indicateur de dommage E_h . Nous avons choisi de prendre comme référence la contrainte normale maximale au plan considéré (qui est elle aussi une caractéristique des contraintes agissant sur ce plan au cours du cycle) pour établir le terme lié au gradient de contrainte. Le nouvel indicateur d'endommagement par plan du critère de Fogue intégrant le gradient de contrainte s'écrit alors :

$$E_h = \frac{a\tau_{ha} + b\sigma_{hha} + d\sigma_{hhm} + \delta\sqrt{G} \langle \sigma_{hh\max} \rangle}{\sigma_{-1}(N)} \quad (\text{II.44})$$

où G est le gradient géométrique de la contrainte normale maximale $\sigma_{hh\max}$ atteinte au cours du cycle sur le plan physique de normale h . Il est défini par :

$$G = \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial z} \right)^2} \quad (\text{II.45})$$

La fonction de fatigue du critère de Fogue modifié est inchangée dans son principe. Elle réalise la moyenne quadratique de E_h sur tous les plans matériels possibles passant par le point d'étude. Nous notons E_{FGG} cette fonction de fatigue, donnée par l'équation II.46. Rappelons que le critère utilise une sphère de rayon unité (d'aire $S=4\pi$) qui a été définie figure I.6 pour modéliser et "balayer" l'ensemble des plans matériels possibles passant par le point de la structure où est conduite l'analyse en fatigue.

$$E_{FGG} = \sqrt{\frac{1}{S} \int_S E_h^2 dS} \quad (\text{II.46})$$

II.4.2.2 Calage du critère

La vérification du critère (obtention de l'égalité $E_{FGG} = 1$) pour les essais simples permet de déterminer l'expression des coefficients pondérant les termes de l'indicateur d'endommagement. Ces constantes sont au nombre de quatre : a, b, d et δ . Quatre limites de fatigue parmi cinq sont donc requises pour établir leur expression. Le tableau II.7 donné plus haut indique les possibilités de calage. Comme pour le critère de Robert, nous avons réalisé les calages pour les deux premières combinaisons. Le détail des calculs aboutissant à la détermination des constantes est donné en annexe C, la vérification du critère pour chacun des quatre essais simples retenus donnant lieu à une équation.

a) Résultats du premier calage ($\sigma_{-1}, \sigma_0, \tau_{-1}, f_{-1}$)

$$a = \frac{y_5}{\alpha} - \alpha \quad (II.47)$$

$$b = \frac{-2a + \sqrt{45 - 2a^2}}{3} \quad (II.48)$$

$$d = \frac{-(6b + 4a) + \sqrt{(6b + 4a)^2 - 180(1 - y_1)}}{6} \quad (II.49)$$

$$\delta = (\alpha - b)\sqrt{R_0} \quad (II.50)$$

$$\text{avec } \alpha = \sqrt{\frac{15y_3 - \sqrt{15^2 y_3^2 - 8y_5^2}}{2}},$$

$$y_1 = \left(\frac{2\sigma_{-1}}{\sigma_0}\right)^2, \quad y_2 = \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2, \quad y_3 = \left(\frac{\sigma_{-1}}{f_{-1}}\right)^2 \quad \text{et } y_5 = 9y_3 - 3y_2.$$

b) Résultats du second calage ($\sigma_{-1}, \tau_{-1}, f_{-1}, f_0$)

$$a = \frac{y_5}{\alpha} - \alpha \quad (II.51)$$

$$b = \frac{-2a + \sqrt{45 - 2a^2}}{3} \quad (II.52)$$

$$d = \theta - \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} \quad (II.53)$$

$$\delta = (\alpha - b)\sqrt{R_0} \quad (II.54)$$

$$\text{avec } \theta = \frac{-(6b + 4a) + \sqrt{(6b + 4a)^2 - 180(1 - y_4)}}{6}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{15y_3 - \sqrt{15^2 y_3^2 - 8y_5^2}}{2}},$$

$$y_2 = \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2, \quad y_3 = \left(\frac{\sigma_{-1}}{f_{-1}}\right)^2, \quad y_4 = \left(\frac{2\sigma_{-1}}{f_0}\right)^2 \quad \text{et } y_5 = 9y_3 - 3y_2.$$

II.5 Validation des critères de fatigue PAG (Papadopoulos), RBG (Robert) et FGG (Fogge) prenant en compte l'effet du gradient de contrainte

Les trois propositions précédentes intégrant la prise en compte du gradient de contrainte sont validées dans ce qui suit à l'aide des résultats expérimentaux de Froustey et Lasserre [58] (série 500), de Dubar [59] (série 600) et de Gough, Pollard et Clenshaw [3] (série 800), séries d'essais qui figurent en annexe A. L'ensemble des résultats expérimentaux retenus correspond à des sollicitations de flexion-torsion sur éprouvettes toroïdales à géométrie connue (rayon R_0) et qui peuvent être considérées comme lisses, car présentant des coefficients de concentration de contrainte k_t proches de l'unité. Ces trois séries regroupent au total 73 essais avec des configurations différentes : présence ou non de contraintes moyennes de flexion et de torsion, composantes en phase ou déphasées.

L'emploi du premier calage (avec les limites de fatigue σ_{-1} , σ_0 , τ_{-1} et f_{-1}) est retenu pour valider les critères intégrant le gradient. Aussi certaines données ont elles été estimées afin de pouvoir mettre en œuvre les critères. Pour les séries d'essais considérées, seules les limites de fatigue au seuil de l'endurance en flexion alternée symétrique f_{-1} , en flexion répétée f_0 et en torsion alternée symétrique τ_{-1} sont fournies, bien que les deux premières soient présentées d'ailleurs comme celles obtenues pour une sollicitation de traction-compression (σ_{-1} et σ_0). En effet, lors du calage d'un critère de fatigue, quel qu'il soit, il n'est pas gênant dans le principe de confondre les limites de fatigue obtenues en traction avec celles de flexion, à plus forte raison quand il s'agit d'employer ensuite le critère pour juger du comportement du matériau en flexion-torsion (on a vu d'ailleurs le bien-fondé de cette façon de faire avec le critère de Mataka). Il n'en demeure pas moins que pour confronter les critères avec intégration du gradient de contrainte aux résultats expérimentaux, il est fondamental de dissocier les limites de fatigue en traction-compression σ_{-1} et σ_0 de celles de flexion f_{-1} et f_0 . Comme seules sont connues les limites de fatigue f_{-1} , f_0 et τ_{-1} , nous utilisons les considérations de Brand et Sutterlin (cf. tableau II.5, paragraphe II.3.1) concernant le coefficient de passage k_p de la limite de fatigue en flexion rotative à celles obtenues pour les autres sollicitations simples. Ce coefficient est égal à 0,9 dans le cas d'une sollicitation de traction, ce qui conduit à la relation suivante :

$$\sigma_{-1} = 0,9 \times f_{-1} \quad (\text{II.55})$$

Connaissant pour chacune des séries d'essais la résistance maximale à la traction R_m du matériau, nous utilisons le modèle du diagramme de Haigh du CETIM, représenté figure II.15, afin de déterminer la limite d'endurance en traction répétée σ_0 en fonction de σ_{-1} . Le diagramme d'endurance du CETIM, construit à partir de σ_{-1} et de R_m , est préféré pour déterminer σ_0 à une nouvelle utilisation du coefficient k_p pour passer de f_0 à σ_0 . Il conduit à l'expression de la limite de fatigue σ_0 en traction répétée suivante :

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{-1}(2R_m - \sigma_{-1})}{R_m} \quad (\text{II.56})$$

Le tableau II.8 récapitule l'ensemble des données, relevées ou estimées, nécessaires à la mise en œuvre des critères.

Essais	Série	R_0 (mm)	R_m (MPa)	f_{-1} (MPa)	f_0 (MPa)	$\sigma_{-1}^{(*)}$ (Mpa)	$\sigma_0^{(*)}$ (Mpa)	τ_{-1} (MPa)
Froustey et Lasserre [58]	500	10	1160	695	1040	625,5	913,7	415
Dubar [59]	600	10	1200	690	1090	621	920,6	428
Gough, Pollard et Clenshaw [3]	800	6,35	1004	584	1066	525,6	776	371

Tableau II.8. Données nécessaires à l'application des critères (^(*) données estimées).

Le calcul du gradient pour des essais de flexion-torsion sur éprouvette lisse s'exprime simplement à partir des contraintes générées par ces sollicitations. Considérons une éprouvette lisse de diamètre $2R_0$ soumise à une sollicitation de flexion-torsion combinées (figure II.19). Chaque sollicitation (flexion ou torsion) est décomposée en une partie moyenne et une partie alternée. Un déphasage peut être introduit entre les deux parties alternées.

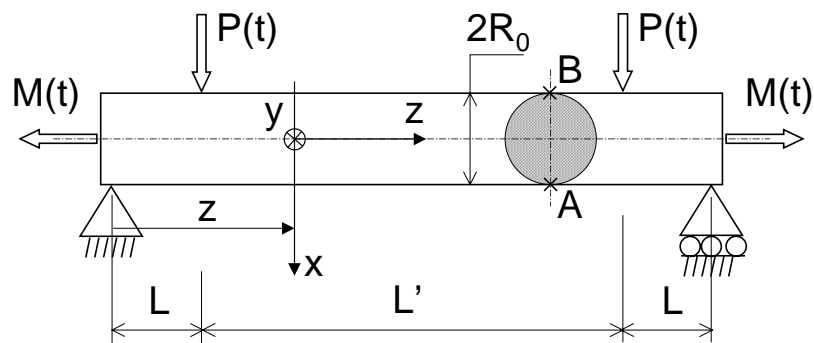


Figure II.19. Eprouvette lisse de diamètre $2R_0$ soumise à une sollicitation de flexion-torsion combinées.

La flexion quatre points génère un moment constant dans la partie centrale de l'éprouvette. Le moment de flexion dans cette zone est égal à $P(t) \times L$ avec :

$$P(t) = P_m + P_a \sin(\omega t) \quad (\text{II.57})$$

où P_m est la charge moyenne, P_a l'amplitude de la charge et ω la pulsation de la sollicitation. Le moment de torsion suit une évolution semblable (partie moyenne M_m et amplitude M_a) mais il peut être déphasé de l'angle ϕ par rapport au moment de flexion. Dans ce cas son expression en fonction du temps est la suivante :

$$M(t) = M_m + M_a \sin(\omega t - \phi) \quad (\text{II.58})$$

Les contraintes maximales sont obtenues en peau de pièce et correspondent à des contraintes normale $\sigma_{zz}(t)$ et de cisaillement $\sigma_{yz}(t)$ dont les expressions sur le diamètre [AB] de la section droite sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}(t) &= \frac{P(t)L}{I_{yy}} x = \frac{P_m L}{I_{yy}} x + \frac{P_a L \sin(\omega t)}{I_{yy}} x \\ &= \sigma_{zzm} + \sigma_{zza} \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (II.59)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}(t) &= \frac{M(t)}{I_G} x = \frac{M_m}{I_G} x + \frac{M_a \sin(\omega t - \phi)}{I_G} x \\ &= \sigma_{yzm} + \sigma_{yza} \sin(\omega t - \phi)\end{aligned}\quad (II.60)$$

où I_{yy} et I_G sont respectivement l'inertie de flexion par rapport à l'axe y et l'inertie polaire de l'éprouvette ($I_{yy} = \frac{\pi R_0^4}{4}$ et $I_G = \frac{\pi R_0^4}{2}$).

Les contraintes de flexion et de torsion donnent lieu à un état de contrainte représentable par un tenseur qui se projette sur tout plan physique de normale h selon l'opération matricielle définie par l'équation II.61. Cette opération fait intervenir les cosinus directeurs du vecteur unitaire h représentant la normale au plan considéré ; h étant orientée par deux angles φ et γ (voir figure C.1 en annexe C), la projection fait apparaître deux fonctions $f(\varphi, \gamma)$ et $g(\varphi, \gamma)$ ne dépendant que de φ et de γ .

$$\sigma_{hh}(t) = {}^T \{h\} [\sigma(t)] \{h\} = \sigma_{zz}(t) f(\varphi, \gamma) + \sigma_{yz}(t) g(\varphi, \gamma) \quad (II.61)$$

avec $f(\varphi, \gamma) = \cos^2 \gamma$ et $g(\varphi, \gamma) = \sin 2\gamma \sin \varphi$.

L'expression de la contrainte normale $\sigma_{hh}(t)$ agissant sur le plan de normale h est une combinaison linéaire des contraintes $\sigma_{zz}(t)$ et $\sigma_{yz}(t)$, dépendant toutes deux de l'abscisse x (c'est à dire du point considéré sur le diamètre [AB]), et des fonctions de projection $f(\varphi, \gamma)$ et $g(\varphi, \gamma)$. La contrainte normale s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\sigma_{hh}(t) &= \left\{ \sigma_{zzm} + \sigma_{zza} \sin(\omega t) \right\} f(\varphi, \gamma) + \left\{ \sigma_{yzm} + \sigma_{yza} \sin(\omega t + \phi) \right\} g(\varphi, \gamma) \\ &= \left\{ \frac{P_m L}{I_{yy}} x + \frac{P_a L \sin(\omega t)}{I_{yy}} x \right\} f(\varphi, \gamma) + \left\{ \frac{M_m}{I_G} x + \frac{M_a \sin(\omega t + \phi)}{I_G} x \right\} g(\varphi, \gamma)\end{aligned}\quad (II.62)$$

L'expression du gradient géométrique de la contrainte normale en un point du diamètre [AB] nécessite de calculer les dérivées partielles de $\sigma_{hh}(t)$ par rapport aux trois coordonnées x , y et z . Celles-ci sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial x} &= \left\{ \frac{P_m L}{I_{yy}} + \frac{P_a L \sin(\omega t)}{I_{yy}} \right\} f(\varphi, \gamma) + \left\{ \frac{M_m}{I_G} + \frac{M_a \sin(\omega t + \phi)}{I_G} \right\} g(\varphi, \gamma) \\ &= \frac{\left\{ \sigma_{zzm} + \sigma_{zza} \sin(\omega t) \right\} f(\varphi, \gamma) + \left\{ \sigma_{yzm} + \sigma_{yza} \sin(\omega t + \phi) \right\} g(\varphi, \gamma)}{x} \\ &= \frac{\sigma_{hh}(t)}{x} \\ \frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial y} &= \frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial z} = 0\end{aligned}\quad (II.63)$$

Le gradient des contraintes, à un instant donné, a une valeur identique en tout point du diamètre [AB]. On retrouve là bien sûr une conséquence de la répartition linéaire classique du modèle poutre. L'analyse en fatigue est donc à mener là où les contraintes sont maximales, c'est à dire aux points A et B de la section droite. Le gradient géométrique de la contrainte normale $\sigma_{hh}(t)$ s'exprime en ces points comme sur tout le diamètre [AB] par :

$$G(t) = \sqrt{\left(\frac{\partial\sigma_{hh}(t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma_{hh}(t)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma_{hh}(t)}{\partial z}\right)^2} = \left|\frac{\sigma_{hh}(t)}{x}\right|_{x=R_0} = \frac{|\sigma_{hh}(t)|}{R_0} \quad (II.64)$$

S'il s'agit de déterminer le gradient de la contrainte normale maximale atteinte au cours du cycle (comme cela est le cas dans les critères de Fogue ou de Mataka modifiés), son expression est établie grâce à la contrainte normale à l'instant particulier où elle devient maximale.

$$G = \sqrt{\left(\frac{\partial\sigma_{hh\max}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma_{hh\max}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma_{hh\max}}{\partial z}\right)^2} = \frac{|\sigma_{hh\max}|}{R_0} \quad (II.65)$$

Les résultats de la validation sont présentés dans les paragraphes suivants sous la forme de tableaux et de graphiques (un par série). La valeur des fonctions de fatigue des modélisations (PAG, RBG et FGG) est donnée pour chaque essai. Les valeurs obtenues à partir des formulations initiales sont rappelées (il s'agit bien évidemment des critères de Mataka (MT), de Robert (RB) et de Fogue (FG)). Soulignons que ces derniers ont été calés avec les limites de fatigue en flexion alternée symétrique f_{-1} , en flexion répétée f_0 et en torsion alternée symétrique τ_{-1} afin qu'ils modélisent plus finement le comportement des matériaux sollicités en flexion-torsion. Pour visualiser l'amélioration ou la dégradation de la validité des critères apportée par la prise en compte du gradient de contrainte, les évolutions des fonctions de fatigue du formalisme initial et de celui modifié sont représentées pour l'ensemble des essais de chaque série. Comme nous l'avons mis en évidence à la fin du paragraphe II.3.2, les valeurs obtenues pour le critère initial de Mataka (MT) calé sur la limite de fatigue en flexion et celui modifié par Papadopoulos (PAG) sont rigoureusement identiques.

II.5.1 Résultats pour la série 500

	MT	PAG	RB	RBG	FB	FBG
0501	1.008666	1.008666	1.006055	1.006055	0.970499	0.970499
0502	0.976684	0.976684	1.044339	1.012862	1.048568	1.026296
0503	0.896680	0.896680	1.005539	0.955560	1.007665	0.973513
0504	0.874751	0.874751	1.001682	0.943744	1.001916	0.962899
0505	0.910202	0.910202	1.063512	0.993904	1.061275	1.015052
0506	0.892138	0.892138	0.704350	0.704350	0.904443	0.904443
0507	1.092225	1.092225	1.168539	1.120929	1.081866	1.061237
0508	1.102974	1.102974	1.183118	1.135202	1.061867	1.041056
0509	1.172038	1.172038	1.146204	1.098594	1.093390	1.072485
0510	1.122084	1.122084	1.201182	1.155619	1.096354	1.074949
0511	1.092955	1.092955	1.125929	1.080382	1.074537	1.052901
0512	1.049028	1.049028	1.050600	1.004873	1.041501	1.019763
0513	1.019641	1.019641	0.907546	0.860282	1.029931	1.008144
0514	1.032568	1.032568	1.114004	1.073624	1.060959	1.038954
0515	0.968258	0.968258	1.031936	0.992837	1.012746	0.990598

	MT	PAG	RB	RBG	FB	FBG
0516	0.852054	0.852054	0.917666	0.885410	0.965107	0.942838
0517	1.010588	1.010588	1.118664	1.077556	1.068990	1.043445
0518	1.006258	1.006258	0.967843	0.904271	1.023598	0.999717
0519	1.162434	1.162434	1.277010	1.205595	1.150238	1.118496
0520	1.049711	1.049711	1.171633	1.103055	1.038972	1.005932
0521	0.964046	0.964046	0.916949	0.845534	0.975213	0.941622
0522	1.124209	1.124209	1.277070	1.181850	1.113654	1.070024
0523	1.018087	1.018087	1.183298	1.091429	1.023098	0.977926
0524	1.005547	1.005547	1.002844	0.907623	1.020767	0.975134

Tableau II.9. Valeurs des fonctions de fatigue des critères de Mataké (MT), de Papadopoulos avec gradient (PAG), de Robert (RB), de Robert avec gradient (RBG), de Fogue (FG) et de Fogue avec gradient (FGG) pour les essais de la série 500.

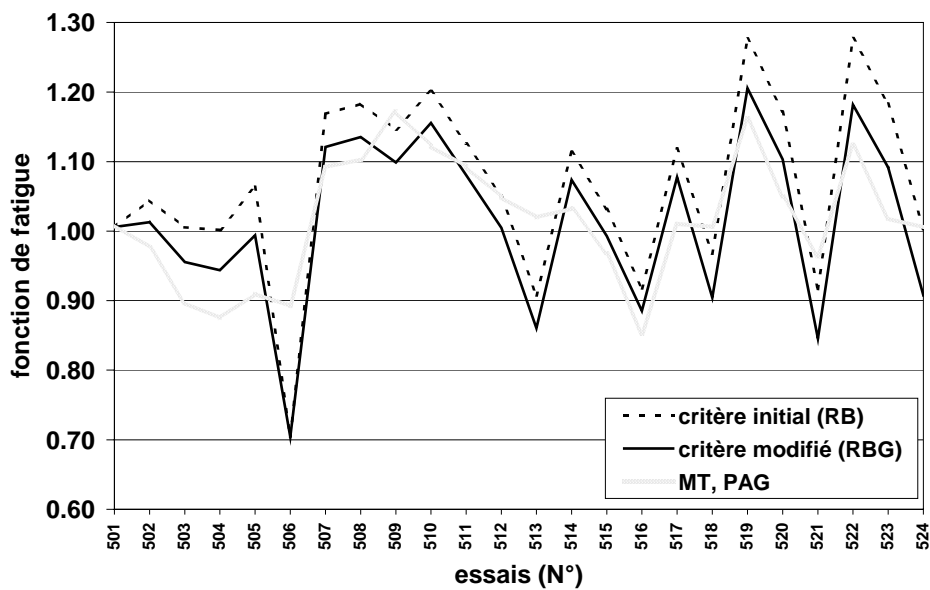


Figure II.20. Evolution des fonctions de fatigue des critères RB et RBG pour les essais de la série 500.

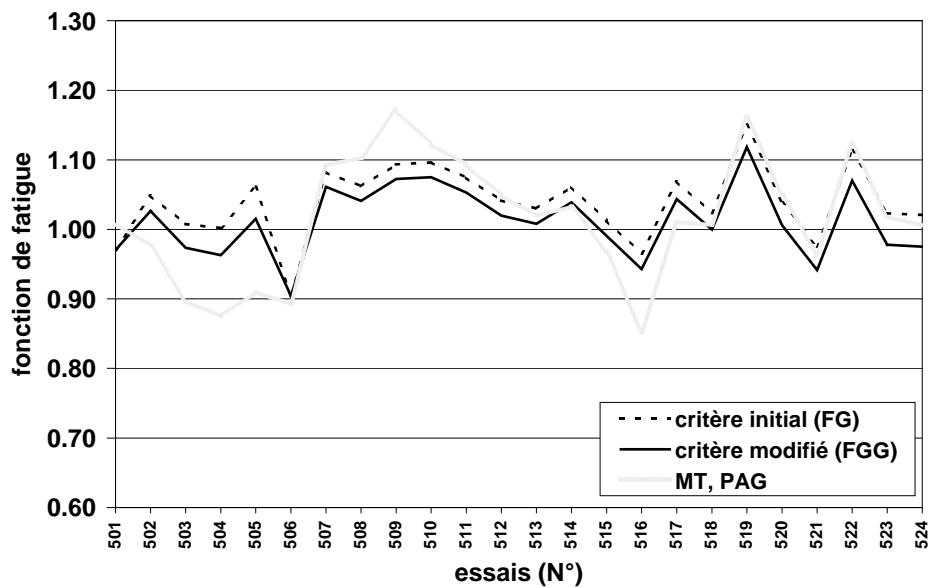


Figure II.21. Evolution des fonctions de fatigue des critères FG et FGG pour les essais de la série 500.

II.5.2 Résultats pour la série 600

	MT	PAG	RB	RBG	FG	FGG
0601	0.981356	0.981356	1.005418	0.995733	1.008226	1.007815
0602	0.976398	0.976398	1.019420	1.003075	1.021355	1.020682
0603	1.010054	1.010054	1.073761	1.050636	1.073093	1.072164
0604	1.093302	1.093302	1.093686	1.078001	1.027031	1.026621
0605	1.233462	1.233462	1.234475	1.208979	1.128451	1.127769
0606	1.218644	1.218644	1.220327	1.185965	1.081511	1.080565
0607	0.977336	0.977336	0.977506	0.977506	0.937958	0.937958
0608	1.077421	1.077421	1.081713	1.065859	0.974458	0.974044
0609	1.107074	1.107074	1.123085	1.108276	1.030872	1.030450
0610	1.036578	1.036578	1.056984	1.044352	1.014069	1.013653
0611	1.142731	1.142731	1.169897	1.145886	1.048338	1.047644
0612	1.144832	1.144832	1.183130	1.150896	1.042678	1.041725
0613	0.885595	0.885595	0.687020	0.687020	0.884851	0.884851
0614	1.151544	1.151544	1.031193	1.015498	1.008634	1.008217
0615	1.042070	1.042070	0.835851	0.820681	0.985109	0.984671
0616	0.849354	0.849354	0.871452	0.860982	0.916422	0.915992
0617	1.069450	1.069450	0.878063	0.853776	0.981556	0.980851
0618	1.131315	1.131315	0.944792	0.912281	1.014934	1.013992
0619	0.985614	0.985614	1.051093	1.037604	1.000773	1.000113
0620	1.027753	1.027753	0.891392	0.870810	0.974911	0.974448
0621	1.095029	1.095029	1.049761	1.034952	1.016989	1.016562
0622	1.056906	1.056906	0.975774	0.960964	0.987439	0.987010
0623	0.971135	0.971135	0.975629	0.963121	0.964368	0.963940

Tableau II.10. Valeurs des fonctions de fatigue des critères de Matake (MT), de Papadopoulos avec gradient (PAG), de Robert (RB), de Robert avec gradient (RBG), de Fogue (FG) et de Fogue avec gradient (FGG) pour les essais de la série 600.

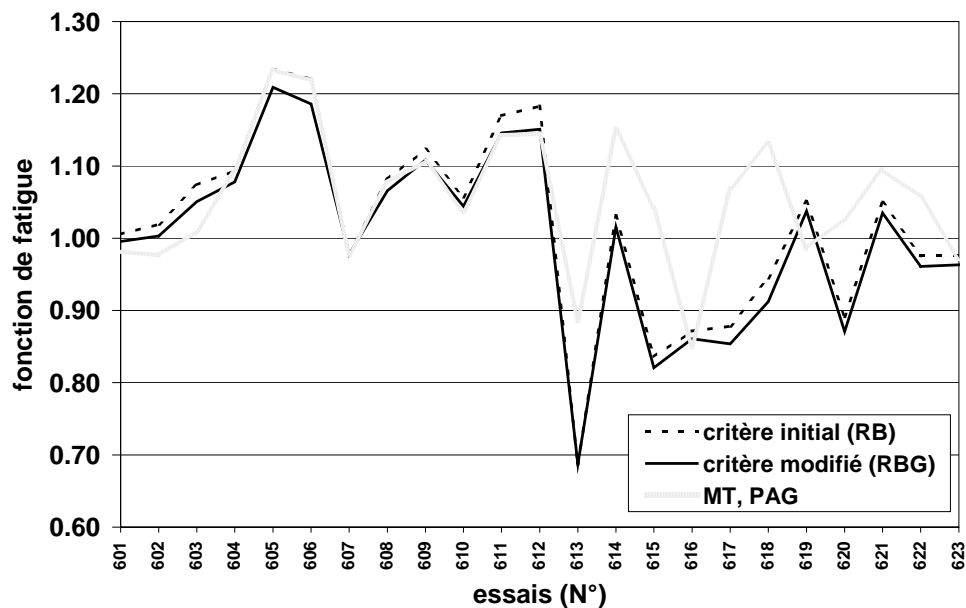


Figure II.22. Evolution des fonctions de fatigue des critères RB et RBG pour les essais de la série 600.

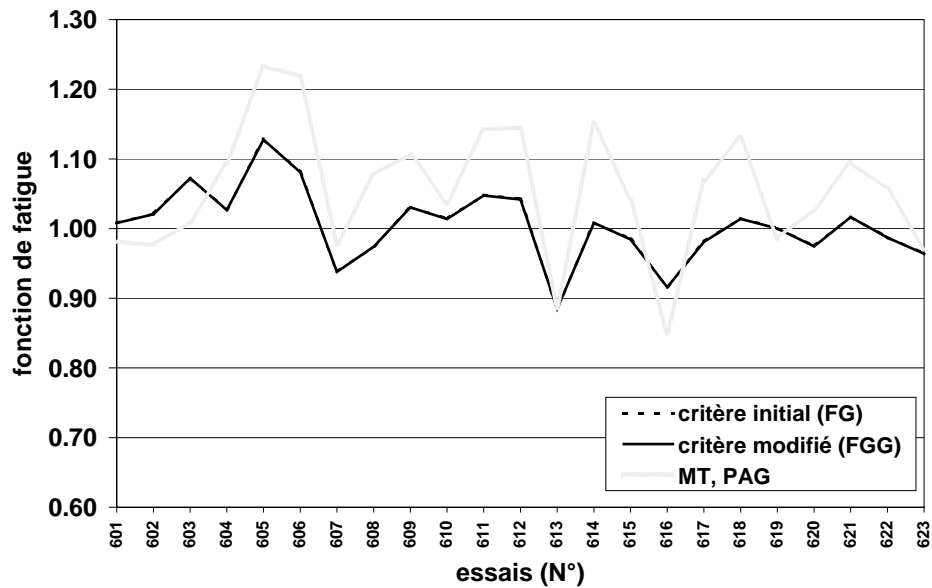


Figure II.23. Evolution des fonctions de fatigue des critères FG et FGG pour les essais de la série 600.

II.5.3 Résultats pour la série 800

	MT	PAG	RB	RBG	FG	FGG
0801	1.043907	1.043907	0.989789	1.055344	0.990078	1.069465
0802	0.913747	0.913747	0.925985	0.94741	0.913951	0.918709
0803	0.924528	0.924528	0.951300	1.002886	0.926837	0.945832
0804	0.941781	0.941781	0.981641	1.04333	0.942276	0.946129
0805	0.924658	0.924658	1.007682	1.130877	0.927286	0.941169
0806	1.049044	1.049044	1.035279	1.15884	0.995849	1.078978
0807	1.049044	1.049044	1.076976	1.261054	0.997816	1.091152
0808	0.997425	0.997425	0.930492	1.124003	0.891066	1.057066
0809	1.004274	1.004274	0.978174	1.229217	0.900081	1.077128
0810	1.034948	1.034948	0.906091	1.002445	0.878824	0.950346
0811	1.154183	1.154183	0.896274	1.089277	0.842959	0.992109
0812	1.013385	1.013385	0.896509	1.012337	0.858024	0.934241
0813	1.146097	1.146097	0.899591	1.110446	0.835656	0.989206
0814	1.026862	1.026862	0.924330	1.06856	0.873721	0.963675
0815	1.178442	1.178442	0.945984	1.182848	0.870132	1.035886
0816	1.049324	1.049324	1.048132	1.048132	1.026501	1.026501
0817	1.020258	1.020258	1.016878	1.016878	0.966695	0.966695
0818	0.992510	0.99251	0.992167	0.992167	0.947564	0.947564
0819	0.989285	0.989285	1.017246	1.120435	0.977985	1.066674
0820	1.081796	1.081796	1.025996	1.105477	0.974761	1.063396
0821	1.112159	1.112159	1.019254	1.123128	0.950754	1.03241
0822	0.896260	0.89626	0.959218	1.178315	0.900942	1.087514
0823	1.029345	1.029345	0.927196	1.104748	0.878380	1.064626
0824	1.068436	1.068436	0.886073	1.10565	0.801120	0.978251
0825	1.173977	1.173977	1.069085	1.163999	0.995777	1.070483
0826	0.931371	0.931371	1.034504	1.085988	0.958129	0.970857

Tableau II.11. Valeurs des fonctions de fatigue des critères de Mataka (MT), de Papadopoulos avec gradient (PAG), de Robert (RB), de Robert avec gradient (RBG), de Fogue (FG) et de Fogue avec gradient (FGG) pour les essais de la série 800.

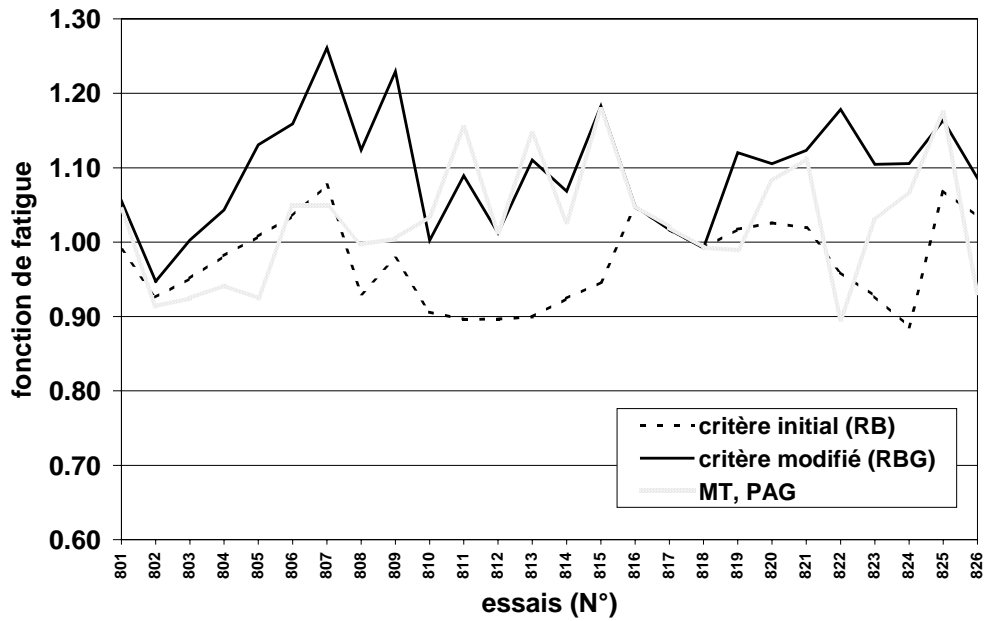


Figure II.24. Evolution des fonctions de fatigue des critères RB et RBG pour les essais de la série 800.

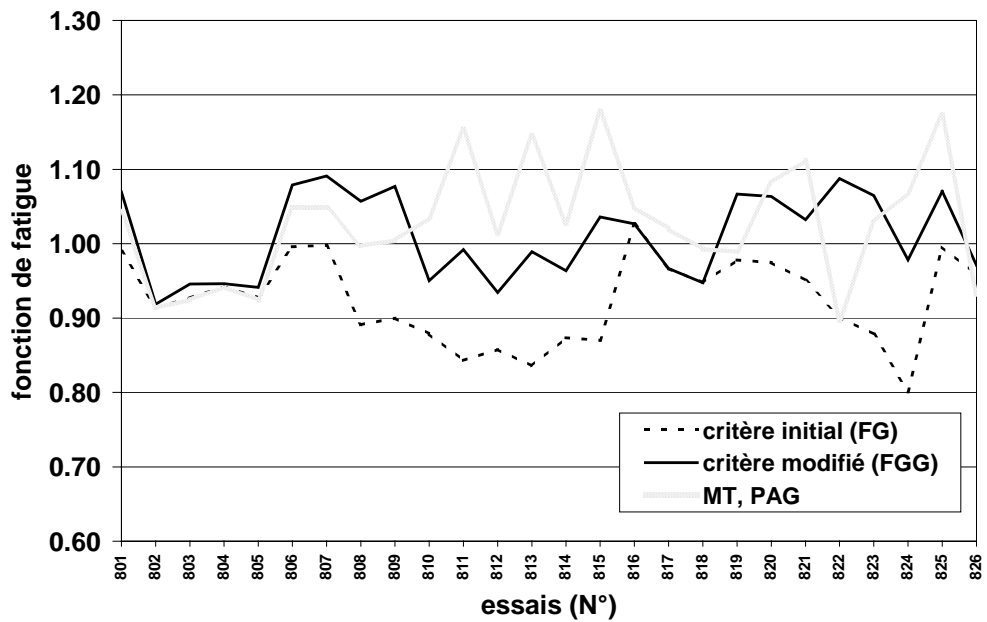


Figure II.25. Evolution des fonctions de fatigue des critères FG et FGG pour les essais de la série 800.

II.5.4 Analyse des résultats

Les graphiques présentés ci-après donnent le nombre d'essais situés dans différents intervalles de l'écart de validité, comme cela a été fait pour la validation des critères au chapitre I. Rappelons que l'écart de validité est l'écart relatif (en pourcentage) de la valeur de la fonction de fatigue du critère vis à vis de la valeur unité qu'il devrait donner idéalement. Ces graphiques permettent d'apprécier le cas échéant l'amélioration globale qu'apporte la prise en compte du gradient de contrainte pour l'ensemble des 73 essais testés de flexion-torsion car ils mettent en vis à vis les résultats du critère initial et ceux du critère modifié.

Pour que la comparaison soit complète, trois graphiques de validation sont présentés pour les critères de Robert et de Fogue : celui correspondant au critère initial calé sur la limite de fatigue en traction-compression alternée symétrique σ_{-1} , celui avec le critère initial calé sur f_{-1} (limite de fatigue en flexion alternée symétrique) et enfin celui intégrant le gradient de contrainte.

Etant donné que la proposition de prise en compte du gradient de Papadopoulos dans le critère de Matake revient à utiliser le critère de Matake calé sur f_{-1} , seulement deux graphiques sont présentés pour illustrer l'amélioration apportée à ce critère : celui correspondant au critère de Matake initial, calé sur σ_{-1} , et celui calé sur f_{-1} (c'est à dire intégrant le gradient de contrainte).

La figure II.26 donne les distributions de validation du critère de Matake, les figures II.27 et II.28 celles du critère de Robert et de Fogue respectivement.

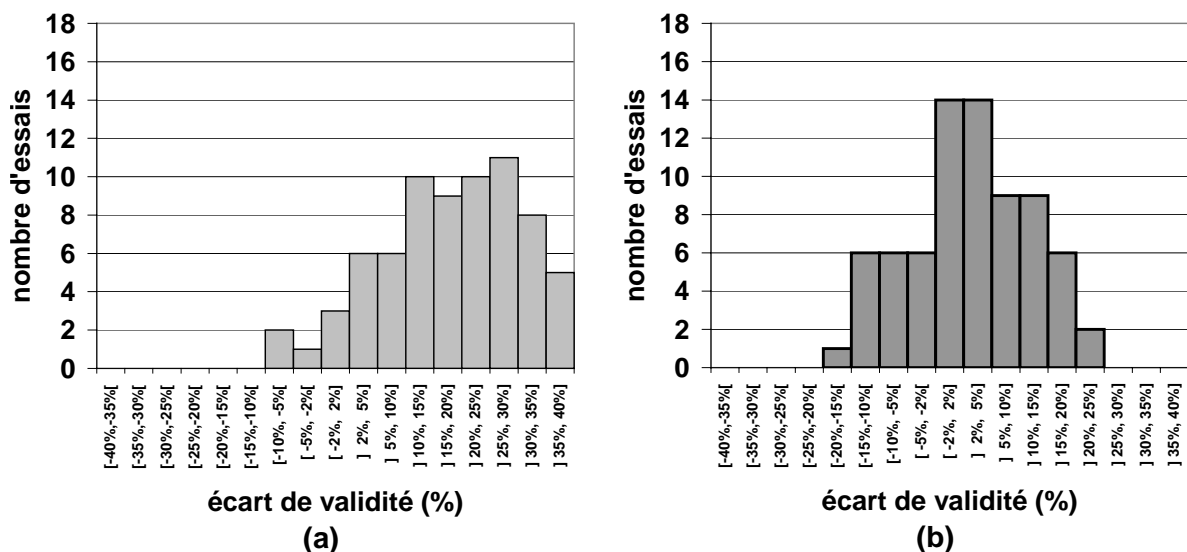


Figure II.26. Résultats obtenus par le critère de Matake (a) calé sur σ_{-1} , (b) calé sur f_{-1} (Papadopoulos avec gradient)

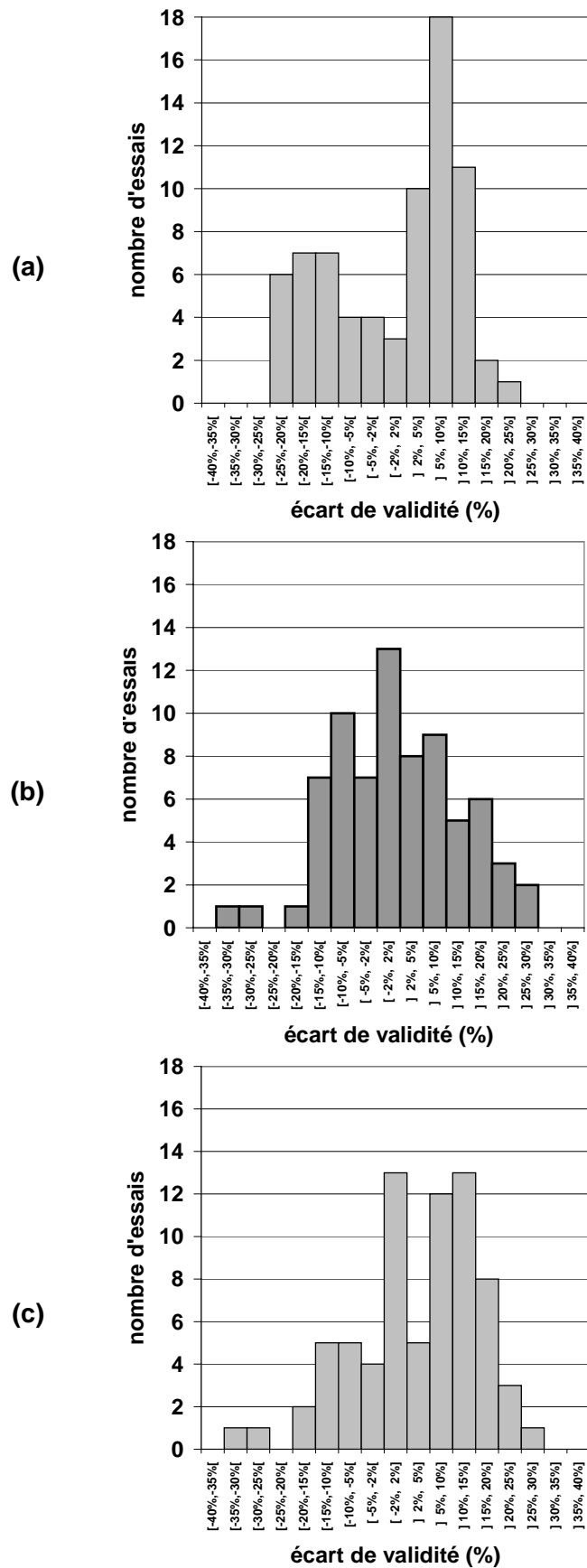


Figure II.27. Résultats obtenus par le critère de Robert (a) calé sur σ_{-1} , (b) calé sur f_{-1} , (c) avec gradient.

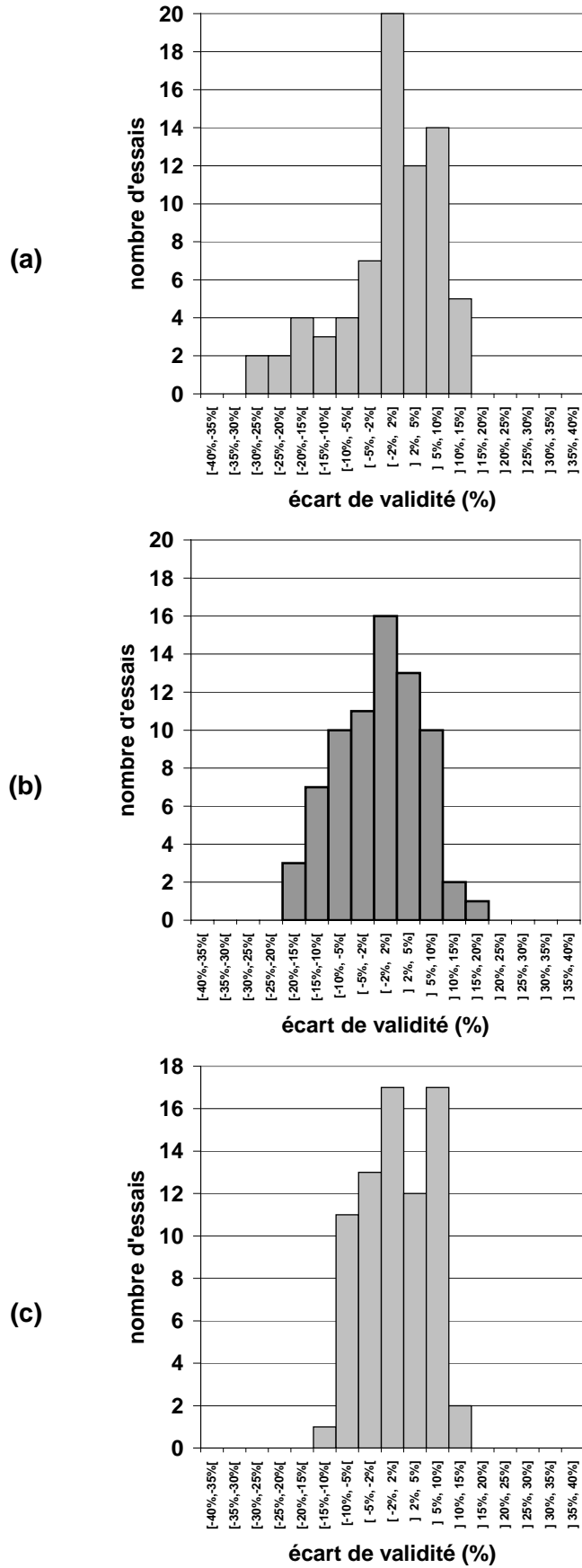


Figure II.28. Résultats obtenus par le critère de Fogue (a) calé sur σ_{-1} , (b) calé sur f_{-1} , (c) avec gradient.

Le bilan des résultats obtenus pour les trois séries d'essais sur lesquelles l'étude a été validée peut être résumé assez simplement :

- Caler les critères multiaxiaux sur la limite de fatigue en flexion au lieu de celle en traction-compression est nécessaire pour pouvoir mesurer correctement la sévérité de cycles de contraintes multiaxiaux présentant une composante de flexion non négligeable. L'amélioration d'une telle démarche de la validité du critère est considérable pour le critère de Mataka, nettement marquée pour les critères de Fogue et de Robert.
- L'introduction d'un terme de gradient en lieu et place du calage sur f_{-1} au lieu de σ_{-1} n'apporte rien de plus au critère de Mataka, améliore légèrement le critère de Robert en le rendant simplement un peu plus conservatif et apporte un plus certain au critère de Fogue. Ces observations sont faites sur l'ensemble des essais de flexion-torsion des trois séries d'essais disponibles. Elles sont à confirmer sur un plus grand nombre d'essais pour être généralisées.
- L'introduction d'un terme de gradient dans le formalisme d'un critère multiaxial donne une flexibilité au critère en ce sens où l'influence du gradient en fatigue, très marquée au demeurant, n'est prise en considération que si la matière où est faite l'analyse est le siège d'un gradient. Le calage sur f_{-1} , suffisant et adéquat lorsqu'il s'agit d'analyser des cycles de contraintes issus d'une sollicitation de flexion, n'est plus du tout adapté en dehors de ce type de sollicitations et se révèle alors insatisfaisant car il rend le critère non conservatif.

II.6 Applicabilité des critères avec prise en compte du gradient de contrainte au cas des structures complexes

Prendre en compte l'influence du gradient de contrainte en fatigue est un objectif que nous voulons atteindre dans le cadre de la procédure de prévision de durée de vie des structures industrielles soumises à des sollicitations quelconques, c'est à dire multiaxiales et à amplitude variable dans le cas le plus général. Les critères de fatigue multiaxiaux comptant parmi les outils incontournables de la démarche proposée, la première étape du travail a consisté à étudier la faisabilité et la validité de la prise en compte du gradient au sein même des critères. Cette stratégie s'explique aussi par le fait qu'une approche semi-empirique telle que celle de Brand et Sutterlin requiert la connaissance des coefficients de concentration de contrainte, qui n'ont guère de sens lorsqu'on s'éloigne un tant soit peu d'éprouvettes entaillées à géométries simples (ce qui, il faut bien le reconnaître, est le cas de nombreuses applications industrielles). De plus cette méthode est restreinte aux cycles uniaxiaux de contraintes et à ceux de flexion-torsion ou traction-torsion en phase. Si la détermination du gradient de la contrainte normale, à un instant quelconque ou lorsqu'elle atteint sa valeur maximale est relativement aisée pour une géométrie d'éprouvette simple, elle l'est nettement moins en tout point d'une structure de forme plus complexe et dont on veut faire l'analyse du comportement en fatigue. La seconde étape du travail, qui va être l'objet de ce paragraphe, consiste donc à développer une méthode numérique robuste qui permette de quantifier le gradient de contrainte nécessaire à l'utilisation des critères multiaxiaux en tout point du composant analysé en fatigue.

La méthode des éléments finis permet, à partir de la connaissance du chargement extérieur et de son évolution au cours du temps, d'établir en tout point de la structure

l'historique en contraintes induit par ce chargement. Dès lors qu'un cycle multiaxial de contraintes est identifié, l'évaluation du gradient de contrainte en vue de sa prise en compte dans un critère de fatigue ne peut se faire qu'avec les informations disponibles fournies par le code de calcul éléments finis, à savoir le champ de contraintes en tous les points de la structure où il est calculé, les coordonnées géométriques de ces points et les tables de connectivité associant les éléments finis aux points. Notre but, dans ce paragraphe, est donc de montrer la faisabilité d'une méthode d'évaluation du gradient de contrainte afin de pouvoir mettre en application les critères de fatigue intégrant sa prise en compte.

Le gradient d'une variable $\sigma_{ij}(x, y, z, t)$ variant dans l'espace tridimensionnel lié au repère orthonormé direct (x, y, z) est défini au sens mathématique par la relation vectorielle ci-dessous :

$$\overrightarrow{\text{Grad}}(\sigma_{ij}(x, y, z, t)) = \frac{\partial \sigma_{ij}(x, y, z, t)}{\partial x} \bar{x} + \frac{\partial \sigma_{ij}(x, y, z, t)}{\partial y} \bar{y} + \frac{\partial \sigma_{ij}(x, y, z, t)}{\partial z} \bar{z} \quad (\text{II.66})$$

La propriété essentielle du gradient utilisée par la suite est d'être une application linéaire ce qui se traduit par la relation ci-dessous :

$$\overrightarrow{\text{Grad}}(\lambda \sigma_{ij}(x, y, z, t) + \mu \sigma_{kl}(x, y, z, t)) = \lambda \overrightarrow{\text{Grad}}(\sigma_{ij}(x, y, z, t)) + \mu \overrightarrow{\text{Grad}}(\sigma_{kl}(x, y, z, t)) \quad (\text{II.67})$$

Le gradient noté $G(t)$ (ou G) de la contrainte normale $\sigma_{hh}(x, y, z, t)$ à un plan physique tel qu'il est utilisé dans les critères de fatigue porte le nom de gradient géométrique. Il correspond en réalité à la norme du vecteur gradient, défini au sens mathématique, de cette contrainte normale. La relation définissant $G(t)$ est donc la suivante :

$$G(t) = \left\| \overrightarrow{\text{Grad}}(\sigma_{hh}(x, y, z, t)) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_{hh}(x, y, z, t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{hh}(x, y, z, t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{hh}(x, y, z, t)}{\partial z} \right)^2} \quad (\text{II.68})$$

La contrainte normale $\sigma_{hh}(x, y, z, t)$ agissant sur le plan de normale h est déterminée par la projection du tenseur des contraintes $[\sigma(x, y, z, t)]$ sur l'axe orienté par h dont les cosinus directeurs dans le repère global (x, y, z) sont h_x, h_y et h_z ; h_x, h_y et h_z sont d'ailleurs des fonctions trigonométriques des deux angles φ et γ définissant h . Cette projection conduit à la relation suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{hh}(x, y, z, t) &= {}^T \{h\} [\sigma(x, y, z, t)] \{h\} \\ &= h_x^2 \sigma_{xx}(x, y, z, t) + h_y^2 \sigma_{yy}(x, y, z, t) + h_z^2 \sigma_{zz}(x, y, z, t) \\ &\quad + 2h_x h_y \sigma_{xy}(x, y, z, t) + 2h_y h_z \sigma_{yz}(x, y, z, t) + 2h_z h_x \sigma_{zx}(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

Le calcul du gradient de la contrainte normale $\sigma_{hh}(x, y, z, t)$, au point considéré de coordonnées (x, y, z) et à l'instant t , est défini en vertu de sa propriété d'application linéaire par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{Grad}}(\sigma_{hh}(x, y, z, t)) &= h_x^2 \overrightarrow{\text{Grad}}(\sigma_{xx}) + h_y^2 \overrightarrow{\text{Grad}}(\sigma_{yy}) + h_z^2 \overrightarrow{\text{Grad}}(\sigma_{zz}) \\ &\quad + 2h_x h_y \overrightarrow{\text{Grad}}(\sigma_{xy}) + 2h_y h_z \overrightarrow{\text{Grad}}(\sigma_{yz}) + 2h_z h_x \overrightarrow{\text{Grad}}(\sigma_{zx}) \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

L'équation II.70 montre que la détermination mathématique du gradient de la contrainte normale $\sigma_{hh}(x, y, z, t)$ peut être établie en fonction du gradient propre à chaque composante du tenseur des contraintes et des cosinus directeurs h_x , h_y et h_z du vecteur définissant la normale h au plan physique concerné.

Une autre démarche possible consiste à calculer directement le gradient mathématique de la contrainte $\sigma_{hh}(x, y, z, t)$. Etant donné qu'un grand nombre de plans physiques doivent être passés en revue pour l'application des critères, soit pour trouver le plan critique soit pour réaliser la moyenne quadratique de l'ensemble des indicateurs d'endommagement par plan, ce calcul du gradient est à réaliser autant de fois qu'il y a de plans à explorer. Cette procédure est donc bien plus lourde et coûteuse en temps de calcul que celle qui découle de la relation II.70 où les vecteurs gradients de chacune des 6 composantes du tenseur des contraintes permettent l'obtention du vecteur gradient de la contrainte normale à n'importe quel plan.

L'équation II.70 peut être présentée sous une forme matricielle dans laquelle est introduite la matrice gradient des contraintes $[G_\sigma]$ (équations II.71 et II.72).

$$[G_\sigma] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} & \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial z} & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} & \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} & \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \end{bmatrix}_{x,y,z} \quad (II.71)$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{\text{Grad}}(\sigma_{hh}(x, y, z, t)) = (h_x^2 \quad h_y^2 \quad h_z^2 \quad 2h_x h_y \quad 2h_y h_z \quad 2h_z h_x)^t [G_\sigma] \quad (II.72)$$

La matrice gradient $[G_\sigma]$ comporte six colonnes qui contiennent les vecteurs gradients de chacune des 6 composantes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{yz} et σ_{zx} du tenseur des contraintes. 18 dérivées partielles sont donc nécessaires pour décrire entièrement cette matrice gradient $[G_\sigma]$.

Le problème numérique à résoudre consiste donc à déterminer en chaque point de coordonnées (x, y, z) et à un instant t du cycle l'ensemble de ces 18 dérivées partielles. Une fois la matrice gradient des contraintes obtenue, le calcul du gradient géométrique défini comme la norme du vecteur gradient ne revêt plus de difficulté. En réalité, le calcul du gradient n'est pas à réaliser à chaque instant t du cycle multiaxial considéré mais il est dépendant du temps car l'état de contrainte lui-même est fonction du temps.

Pratiquement l'estimation des contraintes est réalisée grâce à l'utilisation d'un code de calcul éléments finis en faisant l'hypothèse d'un comportement élastique de la structure. Cette hypothèse permet de calculer les contraintes en tout point de Gauss et à chaque instant à partir d'états de contraintes "unitaires" associés à chaque force unitaire générant le chargement multiaxial. L'évolution du chargement étant connue au cours du temps, l'état de contrainte en chaque point de la structure est reconstitué par le principe de superposition, c'est à dire par combinaison linéaire de chacun des états de contraintes unitaires pondéré par sa force associée. Cette méthode est détaillée au chapitre III. Elle conduit à la

connaissance en chaque point de l'évolution temporelle du tenseur des contraintes selon :

$$[\sigma(x, y, z, t)] = \alpha(t)[\sigma(x, y, z, F_\alpha)] + \lambda(t)[\sigma(x, y, z, F_\lambda)] + \delta(t)[\sigma(x, y, z, F_\delta)] + \dots \quad (\text{II.73})$$

où $\alpha(t)$, $\lambda(t)$, $\delta(t)$, ... sont les fonctions temporelles décrivant la construction du chargement appliqué à la structure.

En utilisant la propriété de linéarité du gradient, la matrice gradient $[G_\sigma]$ au point considéré peut elle aussi être reconstituée à partir des matrices gradients de chaque état unitaire. Cette relation s'écrit :

$$[G_\sigma(t)] = \alpha(t)[G_{\sigma(F_\alpha)}] + \lambda(t)[G_{\sigma(F_\lambda)}] + \delta(t)[G_{\sigma(F_\delta)}] + \dots \quad (\text{II.74})$$

Finalement, le gradient géométrique de la contrainte normale à un instant t se déduit des matrices gradients des états unitaires et du chargement appliqué à cet instant. Celles-ci sont estimées numériquement une seule fois en tout point de la structure. Elles permettent à chaque instant de construire la matrice gradient des contraintes en tout point de la structure avec les coefficients temporels pondérateurs ($\alpha(t)$, $\lambda(t)$, $\delta(t)$, ...). Enfin, pour une orientation de la normale h donnée, l'opération décrite par l'équation II.72 permet de calculer le gradient géométrique $G(t)$ (ou G) de la contrainte normale $\sigma_{hh}(x, y, z, t)$.

L'estimation numérique en chaque point de la structure des matrices gradients des états de contraintes unitaires se résume à mettre sur pied une démarche de calcul des dérivées partielles contenues dans celles-ci. La dérivée partielle d'une composante σ_{ij} du tenseur des contraintes par rapport à une direction donnée, la direction x par exemple, représente un des termes de la matrice gradient pour le chargement unitaire choisi. Elle peut être approchée par le taux de variation, de cette contrainte σ_{ij} , au voisinage du point considéré, ce taux étant évalué de la façon suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x, y, z)}{\partial x} \approx \frac{\sigma_{ij}(x, y, z) - \sigma_{ij}(x + \Delta x, y, z)}{\Delta x} \quad (\text{II.75})$$

Les valeurs approchées des autres dérivées partielles sont obtenues sur le même principe. L'approximation de cette dérivée partielle est d'autant plus juste que la distance Δx est faible. La justesse des valeurs numériques est donc fortement dépendante de la taille des éléments finis qui sont employés pour modéliser la structure puisque la notion de voisinage correspond à la plus petite distance, dans la direction x , entre deux points d'intégration.

Pour mettre en œuvre ce calcul des dérivées partielles en chaque point d'intégration du modèle éléments finis, et donc par extension le calcul du gradient géométrique de la contrainte normale, nous proposons la démarche suivante :

1. Pour un point d'intégration, la table de connectivité des éléments permet de connaître l'ensemble des éléments voisins, c'est à dire des éléments ayant un nœud en commun avec l'élément contenant le point considéré.
2. A partir des éléments voisins, on établit la liste des points voisins contenus dans ces éléments afin d'avoir accès à leurs tenseurs de contraintes respectifs et leurs coordonnées, les uns et les autres exprimés dans le repère global. Tous les points de l'élément contenant le point d'intégration en question font bien entendu partie de cette liste.

3. On recherche ensuite parmi les points voisins ceux qui sont à la fois les plus proches du point considéré et les plus favorablement orientés vis à vis des directions x , y et z du repère global. Cette étape est la plus délicate à entreprendre sachant qu'il faut obligatoirement mettre en avant l'un des deux critères que sont la distance minimale entre les points, et alignement par rapport à une direction du repère. La priorité accordée à l'un se fait au détriment de l'autre.
4. Une fois établi le choix des points voisins servant au calcul des dérivées partielles dans chaque direction (x , y et z), les matrices gradients des contraintes de chaque état unitaire sont constituées puis stockées pour chaque point de Gauss du maillage. Il faut noter que ce sont les mêmes points voisins qui sont utilisés pour chaque état unitaire car le problème d'établissement du gradient est un problème simplement géométrique.
5. L'étape suivante suit la même démarche. On balaye ainsi l'ensemble des points d'intégration de la structure. Pour chacun d'entre eux, autant de matrices gradients (à 18 termes) que d'états unitaires sont stockées. Ceci peut représenter une quantité très importante d'informations mais, une fois celles-ci établies, la détermination du gradient géométrique de la contrainte normale $\sigma_{hh}(x, y, z, t)$ au point de coordonnées (x, y, z) et à l'instant t est très vite réalisée par combinaison linéaire.

II.7 Conclusions

De nombreux résultats expérimentaux montrent l'aspect bénéfique de la présence d'un gradient de contrainte sur la tenue en fatigue des métaux. Les recherches sur la prise en compte de ce gradient ont surtout été axées sur la modélisation des effets d'entaille ("notch effect"). Le principal inconvénient de cette approche est qu'elle définit un jeu de coefficients : le facteur effectif de concentration de contrainte k_f , défini de façon empirique, et le coefficient théorique de concentration de contrainte k_t , dont il faut renouveler la détermination autant de fois que de cas géométriques, de matériaux et de chargements sont rencontrés. De plus ces coefficients peuvent être difficiles à définir dans certains cas, notamment à partir du moment où la notion de contrainte nominale n'a pas de formalisme bien tangible.

Brand et Sutterlin en 1980 puis Papadopoulos en 1996 ont abordé le problème sous l'aspect du gradient de contrainte effectif et défini au sens mathématique au sein de la structure sollicitée en fatigue. Brand et Sutterlin ont mis au point une méthode, dite méthode du gradient, basée sur un grand nombre de résultats expérimentaux issus de la littérature. Ils ont construit plusieurs abaques et une démarche qui permet le calcul de pièces à la fatigue en considérant la présence d'un gradient de contrainte. Cependant leur méthode est d'application restreinte, car adaptée uniquement à des géométries simples (arbres et plaques) sollicitées en flexion (ou traction) et torsion en phase.

Papadopoulos pour sa part propose d'introduire le gradient de la contrainte normale dans le critère de fatigue multiaxial de Matake. Il suppose que le gradient de la contrainte de cisaillement n'affecte pas la tenue en fatigue du matériau. S'il est vrai, au regard des résultats expérimentaux, que la limite d'endurance en torsion ne semble pas affectée de manière manifeste par la contrainte moyenne de cisaillement, l'hypothèse de Papadopoulos mérite d'être validée plus concrètement. De plus son choix du critère de Matake lui permet de mener un parallèle avec les travaux de Gough, Pollard et Clenshaw mais n'apporte pas une réelle amélioration au critère de Matake sur les essais de flexion-torsion traités car son travail revient simplement à caler le critère de Matake sur la limite de fatigue en flexion au

lieu de celle en traction, ce qui au reste paraît naturel pour traiter des essais de flexion-torsion.

Nous avons repris l'idée développée par Papadopoulos pour l'appliquer aux deux critères de Robert et Fogue, en l'adaptant pour respecter leurs formulations respectives initiales. Certes les équations de calage des critères sont plus complexes mais, une fois cette procédure effectuée, les critères sont utilisables au même titre que leurs formulations initiales. L'application à tout cycle multiaxial de contraintes requiert la détermination du gradient de la contrainte normale. Dans le cadre de sollicitations de flexion-torsion, celui-ci est très facilement déterminé, ce qui a permis d'ailleurs de tester les critères intégrant le gradient sur 73 essais variés (du point de vue des déphasages et des contraintes moyennes). La validation a montré une amélioration globale des résultats du critère de Fogue tandis que pour les deux autres critères, aucune amélioration sensible n'est apportée par rapport à un calage sur la limite de fatigue en flexion. Dans le cadre de sollicitations quelconques et plus particulièrement sur des structures complexes, la détermination du gradient est plus délicate. Nous avons montré qu'à partir d'une modélisation éléments finis il est possible de mettre en œuvre une méthode numérique pour évaluer celui-ci.

La proposition de Papadopoulos d'introduction du gradient de contrainte peut être étendue à l'ensemble des critères car ils utilisent des quantités liées aux composantes du tenseur des contraintes (Stulen et Cummings, Findley, Dang Van 1, ...). Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet du gradient et uniquement celui-ci. Si son influence peut s'expliquer par des considérations statistiques liées à la présence de défauts distribués de façon homogène dans un volume, sa prise en compte ne permet pas à l'inverse de justifier cet aspect statistique. Ainsi le modèle développé ne traduit-il pas la différence des limites d'endurance en flexion rotative et en flexion plane observée expérimentalement sur des éprouvettes identiques (ces deux sollicitations conduisant, à un même niveau de contrainte maximale, à des gradients identiques). De même, les critères mis sur pied sont insensibles à l'effet d'échelle dans le sens où, appliqués à deux éprouvettes de taille différente soumises aux mêmes niveaux de contraintes, ils conduisent à un comportement en fatigue se différenciant exclusivement par la valeur des gradients respectifs alors qu'en réalité, l'effet d'échelle agit lui aussi sur la tenue en fatigue et vient s'ajouter à celui du gradient. Dans ce cas la seule modélisation de l'influence du gradient sur le comportement en fatigue n'est pas validée par l'expérience car elle demeure insuffisante pour expliquer l'ensemble des phénomènes qui interviennent.