

Chapitre III : Estimation de durée de vie des structures sous chargement quelconque

Prévoir le comportement des structures en fatigue est un atout de la conception, car pour être compétitive, la solution doit être optimisée au plus juste afin de répondre à un cahier des charges toujours plus exigeant. L'avènement de plus en plus précoce de la fissuration par fatigue est aujourd'hui devenu un souci systématique dans toute démarche de dimensionnement.

Du point de vue de la résistance à la fatigue, le chargement le plus complexe et par conséquent le plus difficile à analyser est celui d'une sollicitation multiaxiale et aléatoire. S'il est vrai que dans certains cas le type de chargement rencontré n'est pas aussi complexe, il n'en demeure pas moins qu'il s'agit du cas qui inclut tous les autres. Le caractère multiaxial provient généralement de l'existence de plusieurs points de sollicitations, qui sont appliquées selon des directions différentes. L'aspect aléatoire est lié pour sa part à la nature imprévisible des sollicitations. Les structures automobiles en sont un exemple typique. La conduite pratiquée et le relief du sol sur lequel évolue le véhicule donnent lieu à des séquences de chargement multiaxiales et à amplitude variable pour les éléments tels que les triangles de suspension, les berceaux moteurs et les éléments du châssis.

Pour rendre fonctionnelle l'optimisation des structures du point de vue de la tenue en fatigue dès la phase de conception, le bureau d'études doit se doter d'outils de simulation lui permettant de prévoir leur comportement en fatigue sous chargement quelconque. La phase de prototypage jusqu'alors systématique pour optimiser les solutions tend à se restreindre à la phase de validation terminale pour des raisons de coûts et de délais. La simulation numérique permet ainsi au concepteur de faire évoluer la structure jusqu'à sa forme optimale, étape après laquelle la phase de prototypage est engagée.

La vérification traditionnelle de la tenue des structures au seuil de l'endurance ne suffit plus aujourd'hui. L'objectif de la conception est d'assurer la durée de vie ou le coefficient de sécurité escomptés. Les composants ne sont donc plus dimensionnés au delà de ce qui est strictement nécessaire et inscrit au cahier des charges. En cela la modélisation du comportement en fatigue doit permettre, de manière aussi réaliste que possible, de localiser rapidement les zones critiques et d'estimer la durée de vie d'un composant soumis à n'importe quel type de chargement multiaxial d'amplitude variable.

III.1 Méthodes d'estimation de durée de vie en fatigue multiaxiale aléatoire

Les travaux de recherche s'attellant au problème sont aujourd'hui nombreux, et le font de manières très diverses, attestant en cela de l'intérêt industriel que ce problème suscite. Nous récapitulons par la suite la majorité des modélisations apparues durant la dernière décennie et qui constituent les principaux axes de recherche dans le domaine.

- *L'approche statistique de Macha [77-80]*

La démarche proposée utilise les caractéristiques statistiques de la séquence multiaxiale en contraintes. Une contrainte équivalente sur un plan physique est définie à l'aide des contraintes normale et tangentielle agissant sur ce plan. Le plan critique recherché est celui dont la contrainte équivalente présente la variance

maximale, laquelle peut être établie facilement au moyen de la matrice de covariance de la séquence multiaxiale aléatoire et des cosinus directeurs de la normale unitaire au plan considéré. La séquence de la contrainte équivalente du plan critique est considérée comme une séquence uniaxiale aléatoire de traction-compression et est traitée comme telle pour l'estimation de durée de vie (utilisation d'un diagramme de Haigh, d'une courbe S-N en traction alternée symétrique et d'une loi de calcul et de cumul d'endommagement). La durée de vie à l'amorçage d'une fissure est alors exprimée en nombre de répétitions de la séquence de chargement. Le plan critique est le plan d'amorçage.

- *L'approche de Socie et Bannantine [81-83]*

Basée sur la modélisation du comportement des matériaux en fatigue oligocyclique, l'approche est développée à partir de la connaissance de l'évolution des déformations en un point d'une structure, souvent issue d'un relevé à partir de jauges de déformation collées au point critique de la structure. La première étape consiste à établir les états de contraintes relatifs aux états de déformations grâce à l'utilisation d'une loi de comportement élasto-plastique multiaxiale. Pour cela sont nécessaires les coefficients matériau de la loi d'écrouissage cyclique déterminée en traction-compression (loi de Ramberg-Osgood). Le spectre en contraintes (calculé) et celui en déformations (donnée initiale) permettent par la suite d'appliquer des critères mixtes dans lesquels interviennent des termes de contraintes et de déformations. Deux critères sont utilisés : celui de Smith-Watson-Topper qui permet de déterminer une fissuration due à un mode de traction et celui de Socie qui est son équivalent pour une fissuration due à un mode de cisaillement. La deuxième étape de la méthode consiste à balayer un grand nombre de plans physiques susceptibles d'être critiques (en surface de pièce) pour trois configurations : une en traction et deux en cisaillement. Dans la configuration de traction, la variable de comptage, à laquelle est appliqué le comptage Rainflow, est la dilatation linéaire unitaire selon la direction perpendiculaire au plan. Pour la configuration de cisaillement le comptage est réalisée à l'aide de la distorsion de la matière. Des critères mixtes, conformes à la configuration du plan considéré (traction ou cisaillement), sont ensuite employés pour établir la durée de vie du matériau pour chaque cycle extrait. Les expressions des critères sont en fait issues des courbes de Manson-Coffin (fatigue oligocyclique) en traction et en cisaillement respectivement. La loi de Miner est utilisée pour calculer et cumuler le dommage sur le plan considéré. Le plan de dommage maximal constitue le plan critique. La durée de vie du matériau pour la séquence multiaxiale en déformations est celle du plan critique.

- *L'approche de Wang et Brown [84-86]*

L'approche de Wang et Brown se rapproche de celle de Socie et Bannantine. Leur démarche suppose que la séquence multiaxiale de chargement soit connue en déformations et en contraintes (lesquelles sont obtenues par l'intermédiaire de lois de comportement). La particularité de cette approche réside dans la manière de compter les cycles multiaxiaux, qui utilise une méthode de comptage basée sur l'évolution relative de la déformation équivalente de Von Mises par rapport à des maximums rencontrés durant la séquence multiaxiale. Les cycles de déformations sont identifiés et extraits de la séquence. Pour chacun d'entre eux, le critère mixte des auteurs (critère en contraintes et en déformations) est utilisé pour estimer la durée de vie du matériau. Le critère est de type plan critique, celui-ci étant défini comme le plan supportant la distorsion maximale. Ce critère provient lui aussi du comportement du matériau en fatigue oligocyclique. La loi de Miner permet de calculer et de cumuler le

dommage au point où l'analyse en fatigue est réalisée, pour l'ensemble des cycles extraits de la séquence. La durée de vie du matériau est alors exprimée en nombre de répétitions de celle-ci. L'approche de Wang et Brown, celle de Socie et Bannantine et d'autres variantes [87,88] sont les techniques utilisées pour le dimensionnement en fatigue dans l'industrie automobile nord américaine.

- *L'approche mésoscopique de Morel [89]*

L'approche proposée par Morel utilise les travaux de Papadopoulos notamment en ce qui concerne l'évolution du dommage du matériau qui se déroule en trois phases : une phase de durcissement suivie d'une phase de saturation puis enfin une phase d'adoucissement. Cette description du dommage est traduite sous la forme d'une courbe S-N à la nucléation d'une fissure (amorçage d'une fissure sur plusieurs grains de matière). Il s'agit d'une approche en contraintes. La séquence multiaxiale de chargement étant connue, la première étape consiste à rechercher le plan critique, qui est celui dont la valeur efficace du cisaillement auquel il est soumis est maximale. Sa détermination impose d'examiner l'ensemble des plans physiques possibles. La deuxième étape de la démarche consiste à trouver la direction dans le plan critique qui conduit au dommage maximal selon l'évolution en trois phases décrites précédemment. Pour une direction choisie, l'évolution du cumul de la déformation plastique microscopique (calculée avec une hypothèse d'écoulement cinématique et isotrope) permet de faire apparaître un certain nombre de transitions de la contrainte de cisaillement (basées sur l'augmentation du domaine plastique microscopique). Le traitement des valeurs de transitions aboutit à la détermination de la contrainte dite de saturation, par l'intermédiaire du critère de Papadopoulos (deuxième version, préconisé pour les métaux doux, cf. 1.2.3.15). La troisième et dernière étape met en œuvre la description du dommage en trois phases grâce à la connaissance de cette contrainte de saturation. Elle aboutit à la durée de vie du matériau pour la totalité de la séquence sur le plan critique et dans la direction choisie telle que le dommage soit maximal. Les caractéristiques du matériau nécessaires à l'application de la méthode sont une courbe S-N, deux limites d'endurance et un essai particulier de cumul de dommage. L'approche de Morel dans le cadre des chargements multiaxiaux d'amplitude variable est un prolongement de la méthode qu'il préconise lorsque les chargements sont multiaxiaux et à amplitude constante [90,91].

- *L'endommagement continu de Lemaitre [92]*

L'approche proposée est basée sur l'évolution du dommage couplé au tenseur des contraintes dont l'évolution constitue la séquence multiaxiale de chargement. Elle s'affranchit d'une décomposition en cycles du chargement en considérant que l'endommagement a lieu à l'échelle microscopique au sein d'une inclusion noyée dans une matrice à comportement globalement élastique. L'ensemble constitue un volume élémentaire à l'échelle macroscopique. La matière se déforme et impose ses déformations à l'inclusion dont le comportement élasto-plastique est couplé au dommage. L'évolution du dommage, basée sur la thermodynamique des milieux continus (processus irréversibles), est liée à l'évolution de la déformation plastique cumulée de l'inclusion (le dommage s'initie à partir d'une valeur seuil de la déformation plastique cumulée). L'amorçage d'une fissure se produit lorsque la variable de dommage atteint une valeur critique. Des travaux récents menés par Sauzay [93] ont pour objectif de considérer non plus une inclusion dans un volume mais une inclusion en surface qui, dans le cadre de l'endommagement par fatigue, doit permettre une meilleure modélisation du phénomène.

- *L'approche de Pitoiset et Preumont [94-97]*

Pitoiset et Preumont s'intéressent à l'endommagement par fatigue des structures soumises à des vibrations aléatoires. Le chargement en contraintes est issu et connu à partir de la réponse vibratoire de la structure considérée. La contrainte équivalente au sens de Von Mises définit un processus aléatoire dont la densité spectrale de puissance se déduit des densités spectrales des composantes du tenseur des contraintes. La densité spectrale de puissance de la contrainte équivalente de Von Mises s'exprime finalement en fonction de la densité spectrale de la réponse modale de la structure (réponse fréquentielle) et de coefficients propres à chaque élément fini. Un processus d'analyse du signal est alors appliqué à cette contrainte équivalente pour évaluer très rapidement le dommage dans l'ensemble des éléments finis de la structure. Il est basé sur des formulations fréquentielles (approximation de Rayleigh ou Single Moment) qui constituent en quelque sorte une alternative au comptage Rainflow. A partir d'une courbe S-N et de la densité spectrale de la contrainte équivalente de Von Mises il est ainsi possible d'estimer le dommage et donc la durée de vie de structures mécaniques soumises à un chargement aléatoire d'origine vibratoire.

- *L'approche du Laboratoire de Mécanique des Solides*

L'approche INSA est une extension des méthodes classiques utilisées en fatigue pour traiter ou de l'aspect aléatoire rencontré sur des chargements uniaxiaux (utilisation du comptage Rainflow et de lois d'endommagement), ou de l'aspect multiaxial des états de contraintes lorsque les chargements sont à amplitude constante (utilisation de critères de fatigue multiaxiaux). La méthode se propose donc de traiter des deux aspects pour aborder le dimensionnement en fatigue sous chargement multiaxial à amplitude variable et exprimé en contraintes. Ce chapitre est entièrement consacré à l'étude et à l'évolution de cette méthode.

III.2 Approches développées dans le cadre du partenariat INSA-LEDEPP

III.2.1 Méthode classique d'estimation de durée de vie

Initiée par Robert en 1992 [29,98], la méthode dite "classique" d'estimation de durée de vie sous chargement multiaxial d'amplitude variable a connu plusieurs évolutions successives [41,99]. Elle a été bien établie et programmée en 1995 par Kenmeugne [100]. Il s'agit d'une approche en contraintes dont l'objectif est de modéliser le comportement en fatigue d'un matériau soumis au cas le plus général de sollicitations, c'est à dire à un chargement multiaxial aléatoire. A partir de la connaissance du chargement multiaxial exprimé sous la forme d'une séquence en contraintes, et des caractéristiques en fatigue du matériau (courbes S-N), la méthode permet d'évaluer la durée de vie d'un composant en service en terme du nombre de répétitions de la séquence de chargement à l'amorçage d'une fissure à l'échelle macroscopique. Nous rappelons ici rapidement les grandes étapes de la démarche à l'aide du synoptique suivant (figure III.1).

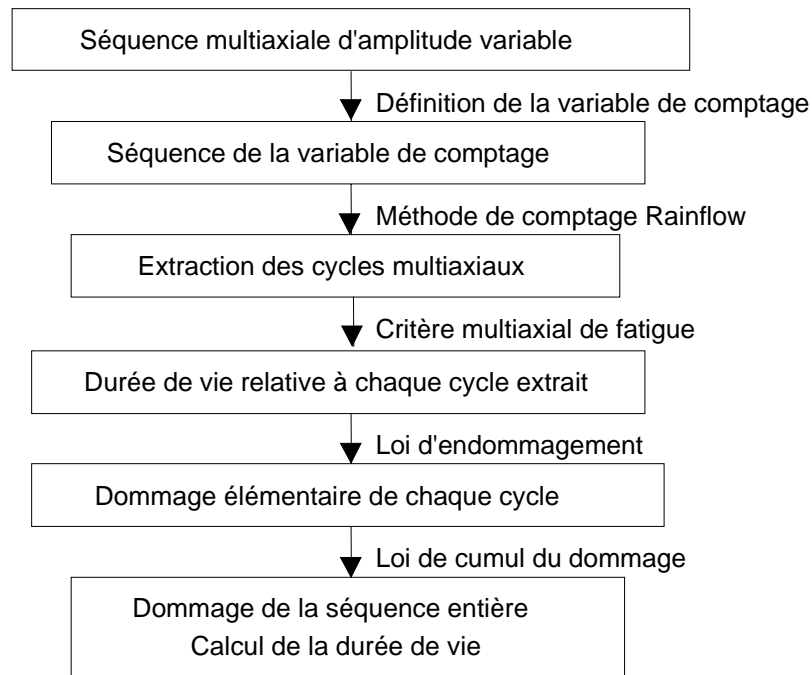


Figure III.1 – Synoptique de la méthode classique de prévision de durée de vie.

La méthode repose sur trois principes qui sont :

- L'identification et l'extraction, du spectre de chargement, de cycles de contraintes multiaxiaux au travers d'une variable de comptage et par le biais de la méthode de comptage Rainflow (norme AFNOR A03-406 [101]).
- L'estimation de la durée de vie du matériau pour chaque cycle extrait de la séquence multiaxiale grâce à l'utilisation de critères de fatigue multiaxiaux. Dans un premier temps, le laboratoire a proposé d'associer à la démarche deux critères, l'un de type plan critique (Robert [29]), l'autre basé sur une approche globale (Fogue [47]). Dans un second temps, les critères validés au premier chapitre ont été intégrés à la démarche. L'ensemble de ces critères, initialement destinés au domaine de l'endurance illimitée, ont été à ce dessein étendus au domaine des durées de vie finies [29].
- Le calcul et le cumul du dommage cycle après cycle. Deux lois d'endommagement ont la possibilité d'être mises en œuvre. Elles permettent le calcul du dommage des cycles extraits de la séquence à partir de la durée de vie du matériau pour les cycles en question. Elles réalisent également le cumul du dommage sur l'ensemble de la séquence. La durée de vie du composant au point où est conduite l'analyse en fatigue est donc ainsi exprimée en nombre de séquences à l'amorçage d'une fissure.

III.2.1.1 La variable de comptage

Si l'identification d'un cycle est aisée en fatigue uniaxiale aléatoire (comptage Rainflow) ou en fatigue multiaxiale d'amplitude constante, elle devient en revanche bien plus complexe lorsque le chargement est multiaxial et à amplitude variable. Dans ce contexte en effet, les sollicitations se présentent en un point matériel sous la forme d'un tenseur de contrainte $[\sigma(t)]$ où chaque composante $\sigma_{ij}(t)$ peut évoluer dans le temps indépendamment des autres (figure III.2). La notion de cycle est alors difficile à définir.

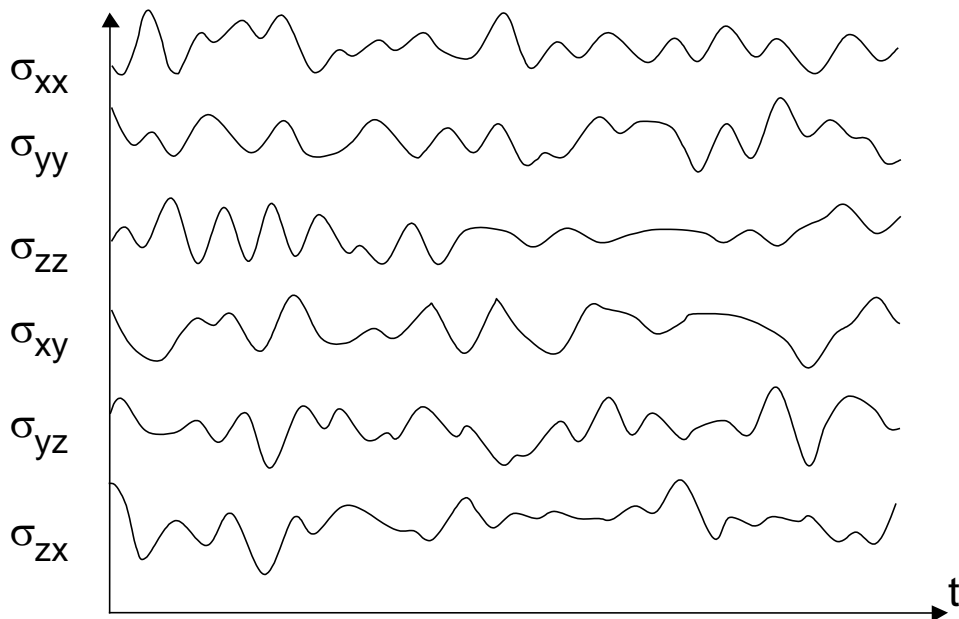


Figure III.2. Exemple de sollicitations multiaxiales aléatoires.

Le comptage de cycles est rendu possible grâce à l'emploi d'une variable de comptage qui doit être représentative à la fois du tenseur des contraintes et de son évolution au cours du temps. La variable retenue est la contrainte normale $\sigma_{h_0 h_0}(t)$ d'un plan physique π_0 fixe et choisi a priori arbitrairement pourvu qu'il respecte une certaine condition [100] (cette condition est totalement rappelée au paragraphe III.2.3.1). Ce plan est défini par sa normale h_0 repérée par les angles φ_0 et γ_0 dans le repère global (x, y, z) d'origine le point d'étude P (figure III.3).

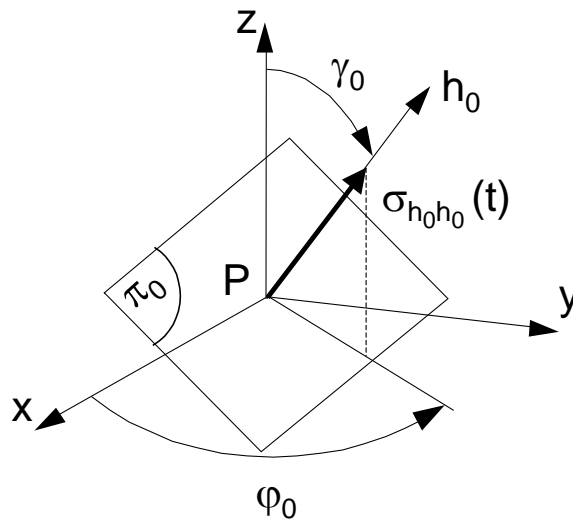


Figure III.3. Définition de la variable de comptage $\sigma_{h_0 h_0}(t)$.

Le comptage Rainflow est alors appliqué à la variable de comptage, c'est à dire à la contrainte normale $\sigma_{h_0 h_0}(t)$. A un cycle de la variable de comptage correspond un cycle multiaxial de contraintes (figure III.4). Cette méthodologie d'identification des cycles multiaxiaux présente l'avantage d'avoir un sens physique (contrainte normale agissant sur le plan de comptage) et d'être facile à mettre en œuvre. Le principal inconvénient de ce principe réside néanmoins dans le fait que le cycle identifié est dépendant du plan de comptage choisi, et par conséquent, les durées de vie obtenues sont tributaires de

l'orientation choisie du plan de comptage. C'est là l'origine de l'évolution de la méthode intervenue par la suite.

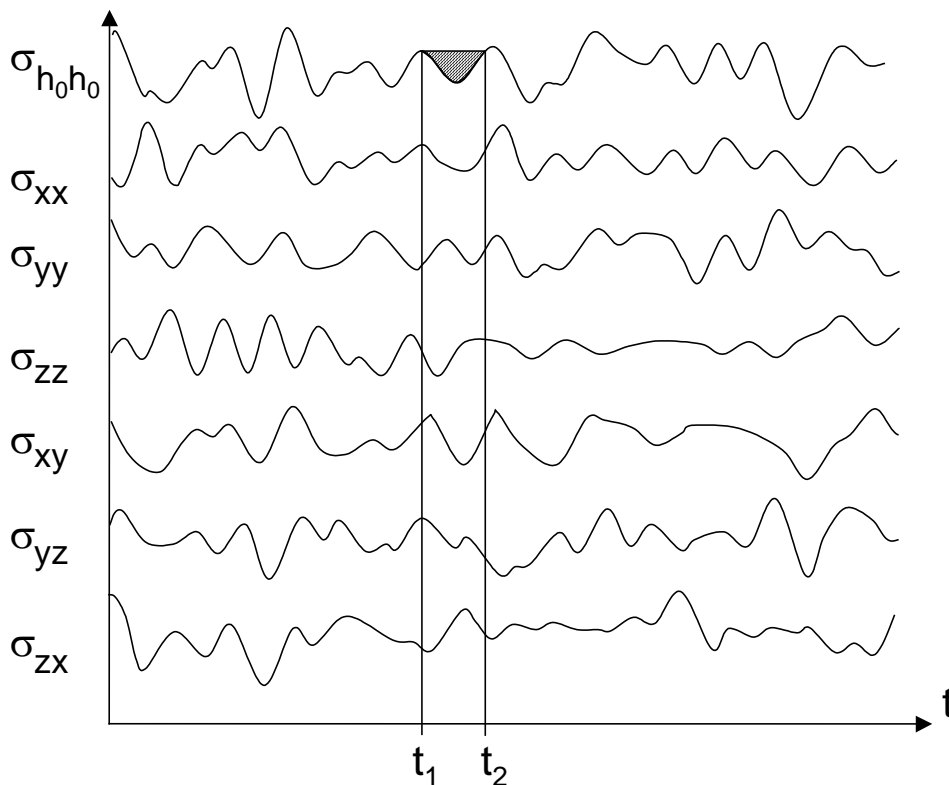


Figure III.4. Identification d'un cycle multiaxial à partir de la variable de comptage.

Une fois identifié, le cycle multiaxial est extrait de la séquence et la durée de vie associée du matériau est déterminée au moyen d'un critère de fatigue multiaxial. Ce point fait l'objet du paragraphe suivant.

III.2.1.2 L'utilisation des critères de fatigue multiaxiaux

Le calcul de la durée de vie du matériau correspondant à chaque cycle est rendu possible grâce à l'utilisation d'un critère de fatigue multiaxial [41]. Ce dernier définit une fonction de fatigue E qui, lorsqu'elle est égale à l'unité, indique que la limite de fatigue à N cycles du matériau est atteinte. De ce fait la durée de vie (N cycles) pour le cycle multiaxial est établie. Un critère de fatigue se présente ainsi généralement sous la forme suivante :

$$E([\sigma_{ij}(t)], \sigma_{-1}(N), \sigma_0(N), \tau_{-1}(N), \dots) = 1 \quad (\text{III.1})$$

$[\sigma_{ij}(t)]$ représente le cycle multiaxial de contraintes. $\sigma_{-1}(N)$, $\sigma_0(N)$ et $\tau_{-1}(N)$ sont les courbes S-N du matériau en traction alternée symétrique, traction-compression répétée et torsion alternée symétrique respectivement. D'autres données peuvent être utilisées suivant les critères telles que la résistance maximale à la traction R_m ou des courbes S-N en flexion par exemple. Les constantes de calage propres à chaque critère dépendent alors des limites de fatigue à N cycles employées. L'équation III.1 dont le formalisme dépend du critère lui-même est implicite en N . Une méthode itérative, établie par Kenmeugne [100] et basée sur une interpolation linéaire-logarithmique, permet de résoudre numériquement cette équation. Ainsi, il est possible de déterminer la durée de vie (nombre N de cycles) du matériau soumis à un cycle multiaxial $[\sigma_{ij}(t)]$, dès lors que les courbes S-N sous sollicitations simples sont connues.

Les critères qui s'appuient sur la notion d'indicateur d'endommagement par plan E_h ne balaient pas tous les plans physiques possibles, puisqu'il en existe une infinité passant par le point d'étude P, mais scrutent dans la réalité un nombre fini de plans que l'on essaie de répartir de la manière la plus homogène possible. En pratique, pour des raisons évidentes d'optimisation des temps de calcul, et ceci quel que soit le critère choisi utilisant la notion d'indicateur d'endommagement, on utilise une sphère discrétisée en facettes d'aires équivalentes. Ces facettes sont au nombre de 209 pour une demi-sphère dans le cas général. Ce nombre est paramétrable en fonction de la finesse escomptée de la discrétisation [11,100]. Ainsi les différentes orientations des plans pris en compte ont une distribution homogène dans l'espace puisque les aires des mailles de la discrétisation sont semblables. La figure III.5 représente sur un huitième de sphère la discrétisation classique conduisant à 209 facettes pour une demi-sphère. L'ensemble des mailles ainsi obtenues ont une aire pratiquement identique.

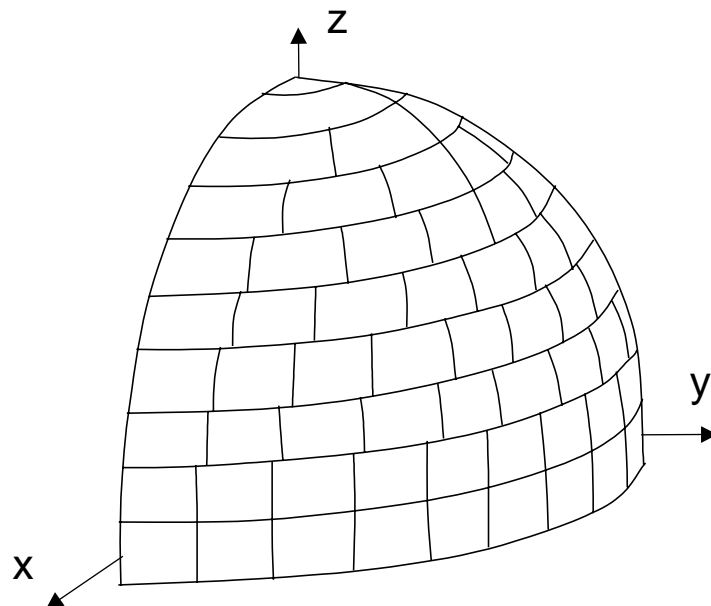


Figure III.5. Discrétisation en 209 facettes ou mailles (pour une demi-sphère) d'aires sensiblement équivalentes.

Ce modèle réduit de façon substantielle les temps inhérents au calcul de la fonction de fatigue tout en considérant un ensemble représentatif de plans physiques. Avec une discrétisation bien plus fine de la sphère, nous aboutissons à des résultats (fonctions de fatigue des critères) très voisins de ceux obtenus par le modèle à 209 facettes alors que les temps de calculs deviennent considérablement pénalisants.

III.2.1.3 Les lois d'endommagement

Les lois d'endommagement permettent, une fois déterminée la durée de vie du matériau relative à chaque cycle multiaxial extrait, de calculer le dommage correspondant et d'en faire le cumul. Lorsque la séquence de chargement est traitée, le dommage cumulé conduit à l'estimation de la durée de vie du matériau en terme du nombre de répétitions de la séquence à l'amorçage d'une fissure macroscopique. Deux lois d'endommagement sont actuellement implantées dans le logiciel de calcul. Il s'agit des lois de Miner [102] et de Lemaitre et Chaboche [103,104]. La première est linéaire et est très simple à mettre en œuvre. La seconde est non linéaire ; elle prend en compte l'ordre d'apparition des cycles ainsi que les "petits" cycles, dont l'amplitude est inférieure à la limite d'endurance du matériau, dès que l'endommagement est initié.

a) Loi de Miner

A partir de la durée de vie du matériau pour un cycle extrait de la séquence multiaxiale, la loi linéaire de Miner stipule que le cycle, pour lequel le matériau a une durée de vie N_i , crée le dommage d_i défini par :

$$d_i = \frac{1}{N_i} \quad (III.2)$$

Pour la séquence considérée, le dommage cumulé D et la durée de vie N du matériau sont définis selon Miner par :

$$D = \sum_i d_i \quad (III.3)$$

$$N = \frac{1}{D} \quad (III.4)$$

où N est le nombre de répétitions de la séquence traitée à l'amorçage d'une fissure.

b) Loi de Lemaitre et Chaboche

La seconde loi proposée correspond à la loi non linéaire de Lemaitre et Chaboche. Initialement dédiée aux chargements uniaxiaux aléatoires, son utilisation a été étendue aux cas des chargements multiaxiaux. L'utilisation d'un critère multiaxial de fatigue permet de calculer la durée de vie N du matériau pour tout cycle multiaxial et par là-même permet d'établir le cycle équivalent de sollicitation uniaxiale (c'est à dire de même durée de vie), comme par exemple $\sigma_{-1}(N)$. Il permet donc de définir une équivalence entre tout type de cycle, uniaxial ou multiaxial, cette relation d'équivalence étant de donner la même durée de vie pour le matériau considéré. C'est cette propriété qui permet d'étendre l'utilisation de la loi d'endommagement de Lemaitre et Chaboche au cadre de la fatigue multiaxiale aléatoire : elle exploite le cycle équivalent au cycle multiaxial pour décrire l'endommagement induit par ce cycle.

Formalisme de la loi

La loi de Lemaitre et Chaboche est basée sur la relation différentielle suivante qui relie l'accroissement de dommage δD et le nombre δN de cycles identiques (σ_{ai}, σ_{mi}) l'ayant engendré.

$$\delta D = \left[1 - (1 - D)^{\beta+1} \right]^\alpha \left[\frac{\sigma_{ai}}{M_0 (1 - b\sigma_{mi}) (1 - D)} \right]^\beta \delta N \quad (III.5)$$

où $\alpha = 1 - a \left\langle \frac{\sigma_{ai} - \sigma_A(\sigma_{mi})}{R_m - \sigma_{ai} - \sigma_{mi}} \right\rangle$ avec $\sigma_A(\sigma_{mi}) = \sigma_D (1 - b\sigma_{mi})$.

$\sigma_A(\sigma_m)$ est l'amplitude du cycle d'endurance de contrainte moyenne σ_m . La fonction de MacCauley ($\langle \rangle$) donne lieu à deux cas de figure :

- cas d'un grand cycle : $\sigma_{ai} > \sigma_A(\sigma_{mi})$ et $\alpha = 1 - a \left(\frac{\sigma_{ai} - \sigma_A(\sigma_{mi})}{R_m - \sigma_{ai} - \sigma_{mi}} \right)$,

- cas d'un petit cycle : $\sigma_{ai} \leq \sigma_A(\sigma_{mi})$ et $\alpha = 1$.

β , a et M_0 sont des coefficients propres au matériau et introduits par la loi. R_m est la résistance maximale à la traction du matériau. σ_D est la limite d'endurance du matériau (en traction alternée symétrique). b est un coefficient matériau représentant l'influence de la contrainte moyenne sur la limite de fatigue. Il modélise une représentation linéaire du diagramme de Haigh à l'endurance (figure III.6).

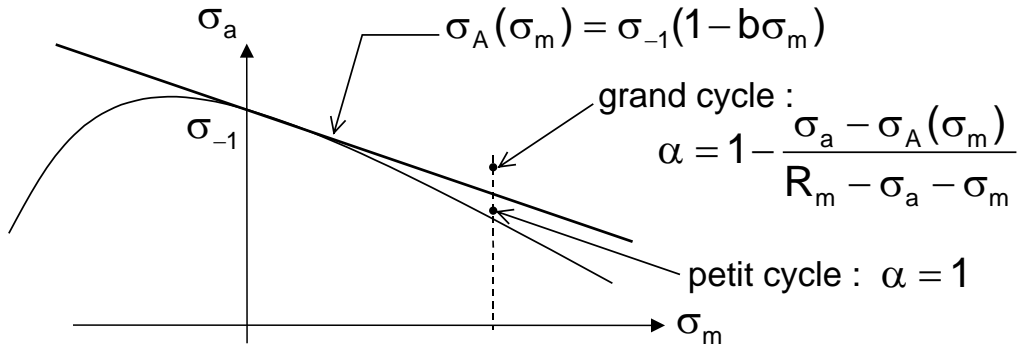


Figure III.6. Diagramme d'endurance en traction. Distinction entre "petit" et "grand" cycles.

L'intérêt relevé de cette loi tient à sa traduction de l'effet de séquence (ordre d'apparition des cycles), sa prise en compte systématique de l'influence de tous les cycles appliqués, y compris les petits cycles dès que le dommage est initié et enfin son évolution non linéaire du dommage, qui traduit mieux certaines observations faites en métallurgie.

Intégration de la loi

- Intégration des petits cycles ; sachant que $\alpha = 1$, l'équation III.5 devient :

$$\frac{(1-D)^\beta}{1-(1-D)^{\beta+1}} \delta D = \left[\frac{\sigma_a}{M_0(1-b\sigma_m)} \right]^\beta \delta N \quad (\text{III.6})$$

Le dommage passe d'une valeur D_i à une valeur D_j après l'application de n_j petits cycles (σ_{aj} , σ_{mj}), d'où :

$$\frac{1}{\beta+1} \ln \left| \frac{1-(1-D_j)^{\beta+1}}{1-(1-D_i)^{\beta+1}} \right| = \left[\frac{\sigma_{aj}}{M_0(1-b\sigma_{mj})} \right]^\beta n_j \quad (\text{III.7})$$

La notation suivante est alors introduite : $X_i = 1 - (1 - D_i)^{\beta+1}$. La nouvelle variable X_i suit le même sens de variation que le dommage D_i . X_i et D_i valent 0 (ou 1) simultanément. L'équation III.7 s'écrit ainsi :

$$X_j = X_i e^{n_j(\beta+1) \left[\frac{\sigma_{aj}}{M_0(1-b\sigma_{mj})} \right]^\beta} \quad (\text{III.8})$$

- Intégration des grands cycles ; l'équation III.5 devient :

$$\frac{(1-D)^\beta}{[1-(1-D)^{\beta+1}]^\alpha} \delta D = \left[\frac{\sigma_a}{M_0(1-b\sigma_m)} \right]^\beta \delta N \quad (\text{III.9})$$

Le dommage passe d'une valeur D_i à une valeur D_j après l'application de n_j grands cycles (σ_{aj} , σ_{mj}). Avec la notation X_i précédente, l'intégration donne :

$$X_j^{1-\alpha_j} - X_i^{1-\alpha_j} = n_j(1-\alpha_j)(\beta+1) \left[\frac{\sigma_{aj}}{M_0(1-b\sigma_{mj})} \right]^\beta \quad (\text{III.10})$$

La durée de vie d'un grand cycle j est notée N_{fj} et correspond, en partant d'un dommage initial D_i nul ($X_i = 0$), au dommage D_j égal à l'unité ($X_j = 1$). L'expression III.10 donne, en posant $1-\alpha_j = aK_j$:

$$N_{fj} = \frac{1}{aK_j(\beta+1)} \left[\frac{M_0(1-b\sigma_{mj})}{\sigma_{aj}} \right]^\beta \quad (\text{III.11})$$

L'équation III.10 peut donc ainsi s'exprimer plus simplement :

$$X_j^{aK_j} - X_i^{aK_j} = \frac{n_j}{N_{fj}} \quad (\text{III.12})$$

Calage du modèle (paramètres $aM_0^{-\beta}$ et β)

Les deux coefficients β et $aM_0^{-\beta}$ sont déterminés à l'aide d'une courbe S-N de traction alternée symétrique $\sigma_{-1}(N)$ en endurance limitée (amplitude plus grande que la limite d'endurance). L'expression de la durée de vie N_{fj} d'un point de la courbe S-N prend alors la forme d'une droite de pente $-\beta$ et dont l'ordonnée à l'origine est $-\ln(aM_0^{-\beta}(\beta+1))$ dans le repère $[\ln(\sigma_{aj}), \ln(N_{fj}aK_j)]$. Les deux seuls paramètres $aM_0^{-\beta}$ et β étant déterminés par régression linéaire de l'ensemble des points représentatifs de la courbe S-N dans le repère précédent, les deux expressions III.8 et III.12 d'incrément du dommage pour des petits ou grands cycles respectivement doivent faire apparaître ces paramètres. Il suffit pour cela d'exprimer le dommage par la variable X_j^a , qui est en fait une fonctionnelle du dommage.

Arborescence de l'intégration

L'algorithme suivant (figure III.7) présente l'arborescence de l'intégration du dommage au cours d'une séquence uniaxiale. Il prend fin au niveau n lorsque $X_n^a = 1$ (qui correspond à $D_n = 1$).

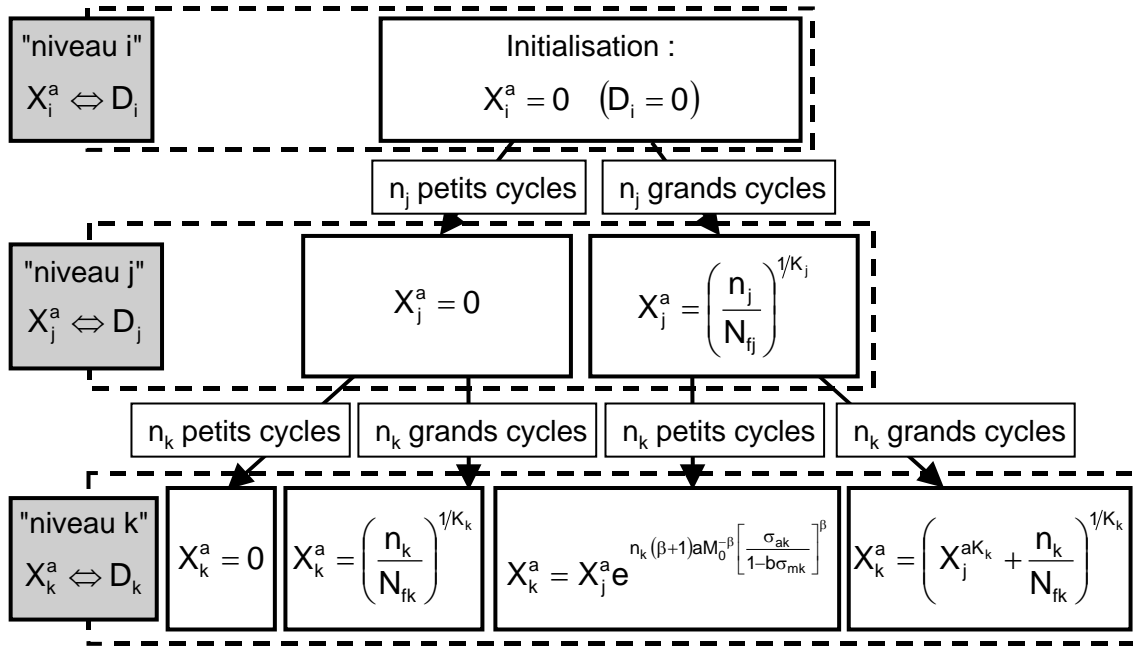


Figure III.7. Arbrescence de l'intégration de la loi de Lemaitre et Chaboche.

Accélération de l'algorithme par une formulation optimisée [105]

La première idée développée ici est de faire la concaténation des petits cycles successifs de la séquence uniaxiale aléatoire sous la forme d'un facteur Q équivalent, ayant la même influence sur la fonctionnelle du dommage X_i^a que la suite des petits cycles successifs en question. En considérant que p petits cycles distincts se suivent, la fonctionnelle X_i^a passe du niveau i au niveau $i+p$, d'après III.8, de la façon suivante :

$$X_{i+p}^a = X_i^a Q = X_i^a e^{aM_0^{-\beta}(\beta+1) \sum_{k=1}^p n_k \left[\frac{\sigma_{ak}}{1-b\sigma_{mk}} \right]^\beta} \quad (\text{III.13})$$

Par identification Q s'écrit :

$$Q = e^{aM_0^{-\beta}(\beta+1) \sum_{k=1}^p n_k \left[\frac{\sigma_{ak}}{1-b\sigma_{mk}} \right]^\beta} \quad (\text{III.14})$$

Cette première démarche permet de traiter p petits cycles différents ou non mais consécutifs en une seule fois au lieu de les aborder un à un.

La deuxième idée est de regrouper un grand cycle avec tous les petits cycles successifs qui lui sont consécutifs (et qui précèdent donc le prochain grand cycle) grâce au coefficient Q défini juste avant. L'augmentation de la fonctionnelle du dommage pour un grand cycle j suivi de p petits cycles s'établit alors de la manière suivante :

$$X_{i+j+p}^a = X_{i+j}^a Q = \left(X_i^{aK_j} + \frac{1}{N_{fj}} \right)^{\frac{1}{K_j}} Q \quad (\text{III.15})$$

Pour chaque grand cycle j de la séquence aléatoire, les quantités associées Q , N_{fj} et K_j sont facilement déterminées lors d'une analyse préalable des cycles constituant la séquence. Il est donc possible de construire une séquence simplifiée du point de vue des calculs et équivalente à la séquence de départ. Comprenant n grands cycles, la séquence initiale est ainsi ramenée à une séquence composée de n événements j dont les caractéristiques K_j , N_{fj} et Q_j sont connues, à savoir :

$$K_j = \frac{\sigma_{aj} - \sigma_A(\sigma_{mj})}{R_m - \sigma_{aj} - \sigma_{mj}} \quad (III.16)$$

$$N_{fj} = \frac{1}{aM_0^{-\beta} K_j (\beta + 1)} \left[\frac{1 - b\sigma_{mj}}{\sigma_{aj}} \right]^\beta \quad (III.17)$$

$$Q_j = e^{aM_0^{-\beta} (\beta + 1) \sum_{k=1}^p n_k \left[\frac{\sigma_{ak}}{1 - b\sigma_{mk}} \right]^{-\beta}} \quad (III.18)$$

K_j et N_{fj} sont relatifs au grand cycle j , (équations III.16 et III.17), Q_j représente l'influence des p petits cycles consécutifs postérieurs au grand cycle j et antérieurs au grand cycle suivant ($j+1$). Pour chaque grand cycle, la relation de cumul s'écrit donc :

$$X_{j+1}^a = \left(X_i^{aK_j} + \frac{1}{N_{fj}} \right)^{\frac{1}{K_j}} Q_j \quad (III.19)$$

La séquence aléatoire initiale se résume alors aux n grands cycles j associés à leur coefficients respectifs K_j , N_{fj} et Q_j , et qui forment désormais la séquence équivalente. En cas de deux grands cycles consécutifs (sans petits cycles intercalés), le terme Q_j du premier est égal à l'unité. Le passage d'une séquence à sa suivante lors de l'intégration du dommage est de cette manière très rapide en terme de temps de calcul, si l'on prend soin lors de la construction de la séquence équivalente de mémoriser les coefficients K_j , N_{fj} et Q_j . L'incrémentation de la fonctionnelle du dommage pour chaque grand cycle de la séquence équivalente se présente toujours sous la forme donnée par la relation III.19. La durée de vie obtenue est ainsi rigoureusement la même que celle obtenue avec un calcul cycle par cycle (petit ou grand), et ceci dans tous les cas de figures.

Afin de quantifier les gains de temps obtenus grâce à l'optimisation de la loi non linéaire de Lemaitre et Chaboche, des simulations de calcul utilisant les séquences CARLOS uniaxiales [106] ont été réalisées pour différents niveaux de contraintes σ_{max} (à seule fin de faire varier le rapport entre le nombre de grands cycles et le nombre de petits cycles). Les résultats sont présentés dans le tableau III.1 suivant :

Séquence CARLOS	Durée de vie (répétitions)	σ_{\max} (Mpa)	Temps de calcul		$t_{\text{opt.}}/t_{\text{ini.}}$
			Méthode optimisée	Méthode initiale	
Verticale $R_{\sigma} = -0.185$	361	420	10" 4	2' 38" 8	15.27
	71	460	10" 3	39" 4	3.83
	14	500	10" 2	15" 8	1.55
	1	540	10" 2	10" 4	1.02
Latérale $R_{\sigma} = -0.639$	6120	420	8" 3	29' 26" 1	212.78
	1177	460	7" 7	5' 46" 2	44.96
	326	500	7" 7	1' 41" 3	13.16
	108	540	7" 7	38" 3	4.97
Longitudinale $R_{\sigma} = -1.595$	103	420	6" 7	33" 3	4.97
	40	460	6" 6	16" 3	2.47
	17	500	6" 6	10" 7	1.62
	7	540	6" 6	8" 2	1.24

Tableau III.1. Récapitulatif des résultats (durées de vie et temps de calcul).

On observe toujours une réduction du temps de calcul, d'autant plus marquée que le nombre de répétitions de la séquence (durée de vie) est important, c'est à dire que le nombre et le temps de calcul sont conséquents. En résumé, les gains de temps de calcul sont d'autant plus forts qu'ils étaient nécessaires. Un autre avantage primordial de cette démarche d'accélération des calculs est qu'elle donne toujours le résultat exact au sens de la loi d'endommagement. L'accélération produite ne s'est pas faite au détriment de la précision des calculs.

III.2.1.4 Validation de la méthode classique

La méthode "classique" de prévision de durée de vie en fatigue multiaxiale a été confrontée à des résultats expérimentaux menés au sein du laboratoire du Professeur Macha (Opole - Pologne). Des éprouvettes cruciformes en acier (dont la géométrie et les dimensions sont données figures III.8 et III.9) ont été soumises à dix séquences biaxiales aléatoires dont un extrait est présenté à titre d'exemple figure III.10. La partie centrale des éprouvettes est volontairement amincie (usinage sphérique) afin de localiser à cet endroit l'amorçage de la fissure macroscopique.

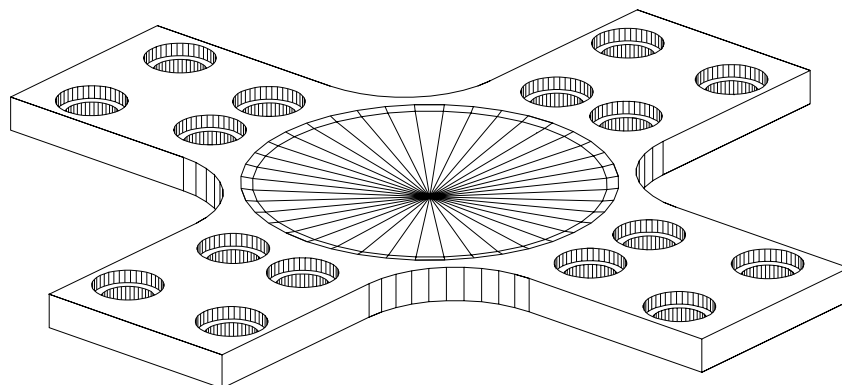


Figure III.8. Dessin 3D des éprouvettes cruciformes.

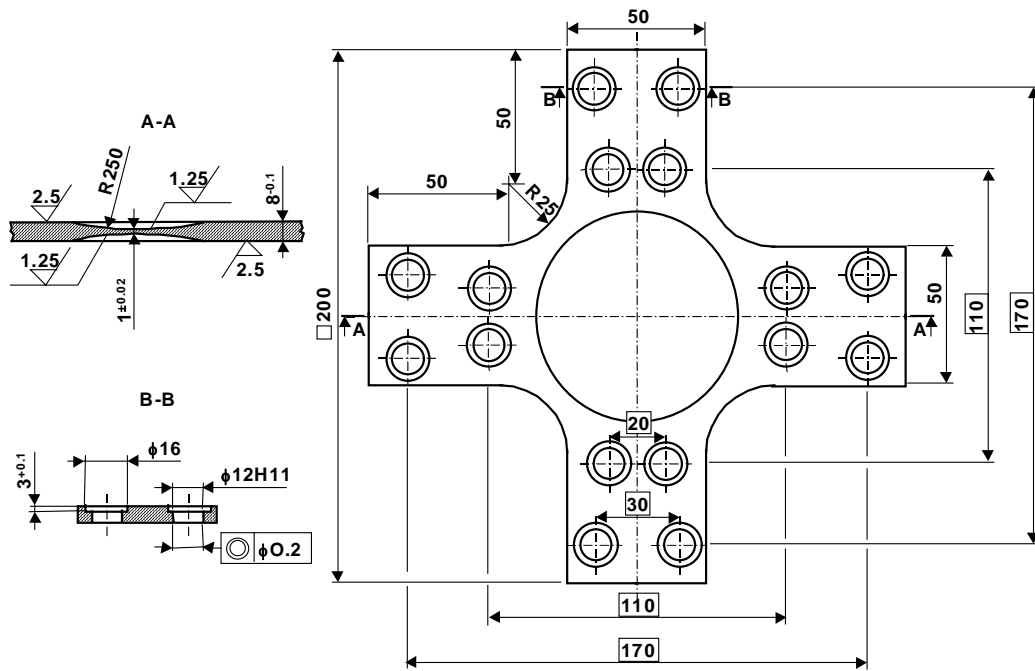


Figure III.9. Dessin de définition des éprouvettes cruciformes.

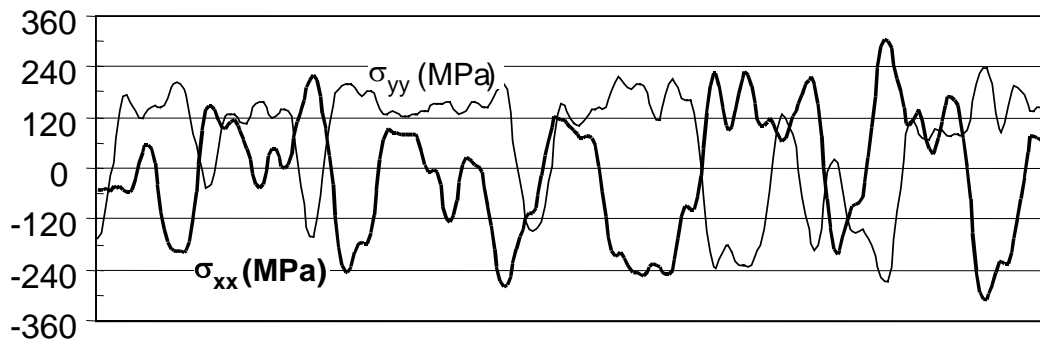


Figure III.10. Echantillon d'une des séquences biaxiales aléatoires utilisées.

Les éprouvettes sont réalisées en acier 10HNAP à faible taux de carbone. La composition chimique et les caractéristiques mécaniques statiques sont données respectivement dans les tableaux III.2 et III.3.

Éléments	C	Mn	Si	P	S	Cr	Cu	Ni
[%]	0.115	0.71	0.41	0.082	0.028	0.81	0.30	0.50

Tableau III.2. Composition chimique de l'acier 10HNAP.

σ_e (MPa)	R_m (MPa)	ν	E (MPa)
418	566	0.29	215 000

Tableau III.3. Caractéristiques mécaniques de l'acier 10HNAP.

Les données de fatigue nécessaires au calage des critères utilisés par la méthode sont les trois courbes S-N présentées figure III.11.

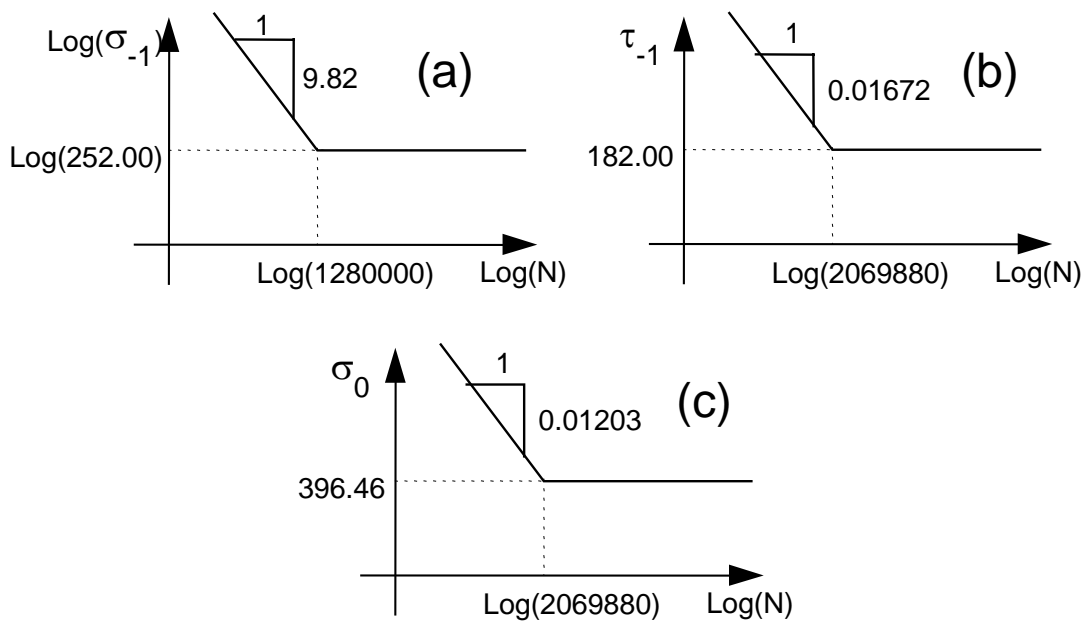


Figure III.11. Courbes S-N en traction alternée symétrique (a), en torsion alternée symétrique (b) et en traction répétée(c) de l'acier 10HNAP.

Les résultats expérimentaux et théoriques sont donnés dans le tableau III.4 ci-dessous. Les durées de vie sont exprimées en nombre de répétitions de la séquence de base. Deux lois d'endommagement (Miner et Lemaitre et Chaboche) sont utilisées. Pour le matériau considéré, le calage de la loi d'endommagement de Lemaitre et Chaboche, effectué en utilisant la procédure habituelle décrite par Kenmeugne [100], a conduit aux constantes du modèle suivantes : $\beta = 4,5093$ et $aM_0^{-\beta} = 2,7135 \times 10^{-17}$. La première colonne du tableau présente les durées de vie expérimentales, la deuxième donne les estimations établies à l'aide de la loi linéaire de Miner et enfin la troisième donne celles obtenues avec la loi non linéaire de Lemaitre et Chaboche. Les durées de vie calculées sont toutes estimées à l'aide du critère de Robert.

Séquences	Durées de vie expérimentales (nombre de séquences)	Durées de vie calculées (nombre de séquences)	
		Miner	Lemaitre et Chaboche
GP9302	3273	5142	650
GP9305	287	189	130
GP9307	398	652	416
GP9308	875	505	369
GP9310	1301	593	390
GP9312	2468	971	610
GP9313	1664	672	548
GP9314	848	322	239
GP9315	267	28	19
GP9619	342	308	167

Tableau III.4. Résultats expérimentaux et théoriques obtenus avec la méthode classique.

Des rapports moyens de 2.5 et 4.1 sont observés entre les durées de vie expérimentales et celles calculées respectivement pour la loi de Miner et celle de Lemaitre et Chaboche. Les estimations sont majoritairement conservatives, c'est à dire qu'elles constituent des prévisions de durée de vie plus faibles que ce que le matériau supporte réellement.

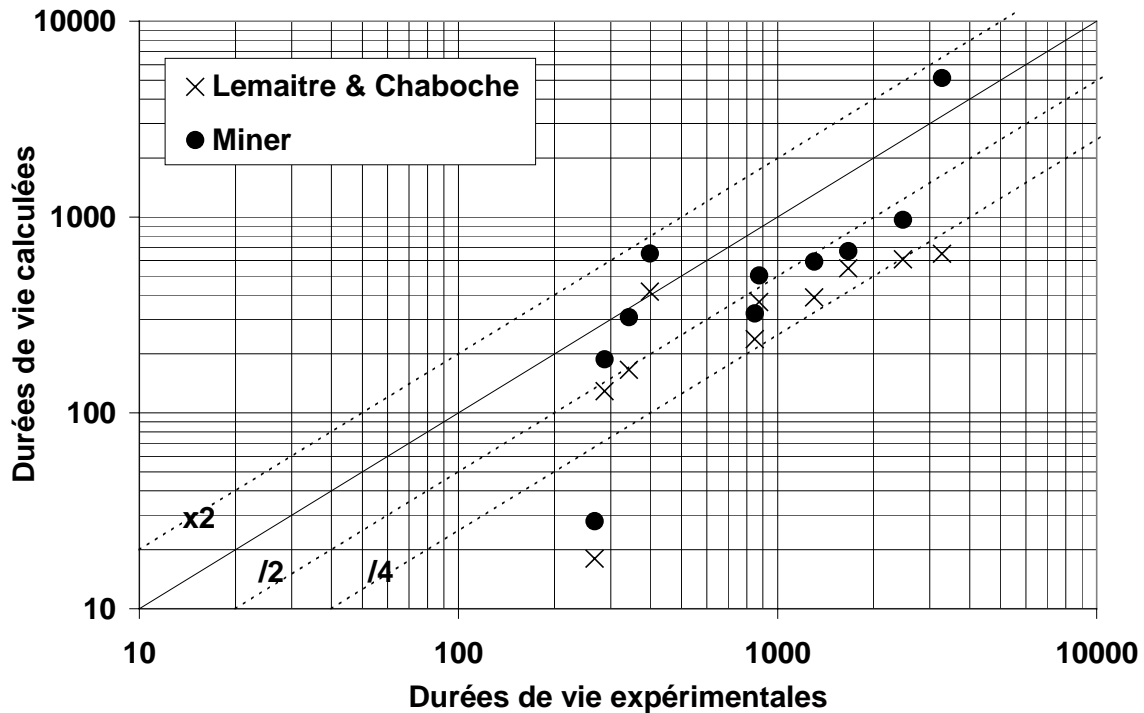


Figure III.12. Comparaison des durées de vie calculées (par la méthode classique) et de celles obtenues expérimentalement

III.2.2 Méthode basée sur le principe du dommage par plan

Les critères de fatigue multiaxiaux du laboratoire sont basés sur la notion d'indicateur d'endommagement par plan (E_n). Le fait de définir un indicateur relatif à une facette de normale h nous a incités à développer le concept du dommage par plan. En effet le phénomène de fatigue d'un matériau (fissuration dans un plan) est la conséquence d'un chargement variable. Lors d'une sollicitation (statique ou dynamique d'ailleurs), les plans matériels ou facettes ne sont pas en général soumis au même niveau de contraintes de par leur orientation. A plus forte raison lors de la succession de cycles multiaxiaux d'amplitude et de nature différentes, il est facilement concevable que les facettes s'endommagent différemment les unes par rapport aux autres.

Considérons pour illustrer notre raisonnement et à titre d'exemple, l'ensemble des essais de flexion-torsion de Simbürger [38] présentés dans le tableau III.5 (série 100 de l'annexe A). Ces essais multiaxiaux représentent pour certains des cycles au cours desquels les directions principales des contraintes sont fixes par rapport à la matière et pour d'autres des cycles dont les directions principales des contraintes sont mobiles. L'évolution des contraintes $\sigma_{ij}(t)$ appliquées s'exprime sous la forme de fonctions sinusoïdales :

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ijm} + \sigma_{ija} \sin(\omega t - \phi_{ij}) \quad (\text{III.20})$$

où σ_{ijm} , σ_{ija} et ϕ_{ij} représentent respectivement la valeur moyenne, l'amplitude et le déphasage propre de la composante $\sigma_{ij}(t)$ des contraintes.

Essais		σ_{11m}	σ_{11a}	σ_{12m}	σ_{12a}	ϕ_{12}
Directions principales des contraintes fixes	1		463			
	2	400	400			
	3				275	
	4			261	261	
	5		364		209	
Directions principales des contraintes mobiles	6		332		191	30°
	7		315		181	60°
	8		328		189	90°
	9	300	300		173	
	10	268	268		154	90°
	11		319	183	183	

Tableau III.5. Présentation des essais de Simbürger [38].

Il s'agit d'essais pratiqués sur un acier XC48 de résistance mécanique $R_m = 850$ MPa. L'amorçage de fissure a été observé pour 100 000 cycles. Les limites de fatigue de ce matériau à 10^5 cycles sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{-1} &= 463 \text{ MPa} \\ \sigma_0 &= 800 \text{ MPa} \\ \tau_{-1} &= 275 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

La figure III.13 donne pour chaque essai la distribution des indicateurs de dommage par plan E_h obtenue avec le critère de Robert en fonction de l'orientation de la normale h au plan, elle-même définie à l'aide des deux angles φ et γ .

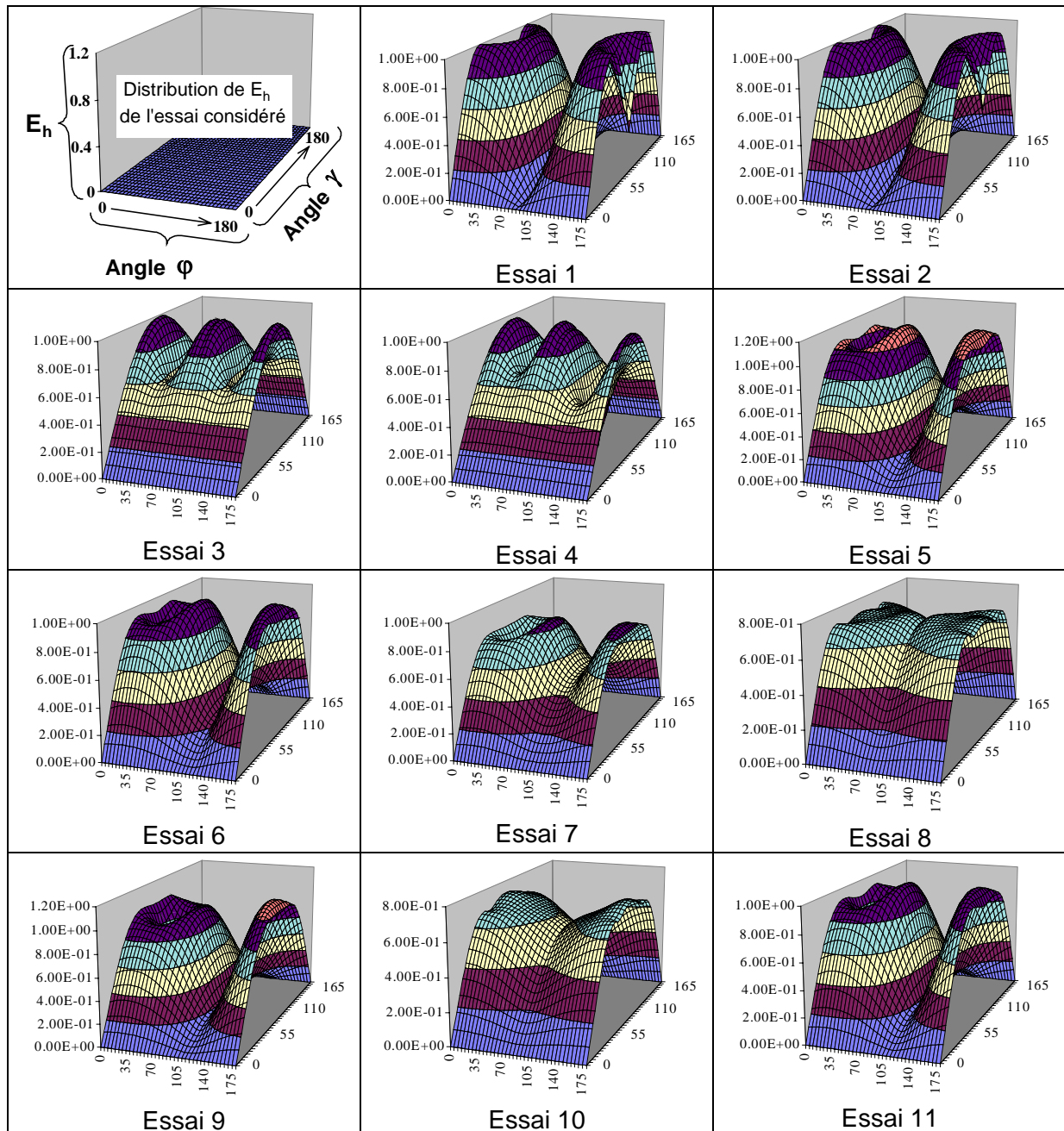


Figure III.13. Distributions des indicateurs d'endommagement par plan E_h en fonction des deux angles φ et γ définissant l'orientation de la normale h au plan pour l'ensemble des essais de Simbürger selon le critère de Robert.

Les distributions des indicateurs d'endommagement pour l'ensemble des essais sont relativement différentes. Pour certains essais un nombre fini de plans présentent un indicateur de dommage maximum. Ces plans sont plus endommagés que tous les autres du fait de leur orientation particulière et de la nature du cycle appliqué. Pour d'autres essais, ce sont de nouvelles facettes qui sont les plus sollicitées. De plus, certains cycles de contraintes donnent lieu à des distributions attestant qu'une infinité de facettes s'endommagent de façon maximale. En résumé, ces essais montrent que l'endommagement d'un plan matériel au cours d'un cycle dépend de l'orientation propre du plan en question et de la nature du cycle appliqué.

L'idée contenue dans notre raisonnement est donc de calculer et de cumuler le dommage plan physique par plan physique. L'objectif n'est plus de décrire le dommage de façon globale au niveau du point d'étude cycle après cycle, mais de se placer à l'échelle du plan, car cela semble plus physique et donc plus réaliste.

Les indicateurs d'endommagement E_h définis par les critères de Robert et de Fogue sont à la base du concept du dommage par plan. Cependant, il n'est pas possible d'utiliser l'indicateur associé au critère de Fogue car ses constantes de calage a , b et d sont déterminées après avoir effectué la moyenne quadratique des indicateurs d'endommagement de tous les plans possibles. Lors du calage sur les trois limites de fatigue à N cycles, respectivement $\sigma_{-1}(N)$, $\sigma_0(N)$ et $\tau_{-1}(N)$, on écrit que le critère est vérifié, c'est à dire que pour chacune d'entre elles la relation suivante est établie : $E_{FG} = 1$. De là, on aboutit à un système de trois équations à trois inconnues a , b et d . L'intégration effectuée pour le calcul de la moyenne quadratique des E_h rend alors dépendants entre eux les indicateurs d'endommagement par plan. La fonction de fatigue E_{FG} du critère qui elle seule est utilisable pour le calcul de durée de vie n'est donc pas représentative d'un seul plan. On ne peut alors attribuer une durée de vie à un plan matériel donné. Ce problème inhérent au caractère global du critère de Fogue, n'est pas rencontré avec le critère de Robert (ou d'une manière générale avec un critère de type plan critique). Avec ce dernier, la fonction de fatigue E_{RB} est le maximum atteint par l'indicateur d'endommagement E_h sur le plan critique. Elle est donc représentative de ce seul plan.

A partir de la modélisation de la sphère en facettes d'aires équivalentes, nous nous proposons de calculer et de cumuler le dommage facette par facette. Nous envisageons alors de visualiser la distribution du dommage plan par plan quand une séquence multiaxiale aléatoire de chargement est complètement traitée, c'est à dire quand tous les cycles extraits ont été étudiés. Dans ces conditions le plan qui cumule le plus de dommage constitue le plan critique du matériau ou plan d'amorçage sur l'ensemble de la séquence ; il détermine sa durée de vie, au point étudié de la structure et pour la séquence entière.

III.2.2.1 Propositions de mise en œuvre du dommage par plan

Trois démarches ont été proposées pour mettre en pratique le principe du dommage par plan à partir du critère de type plan critique. Les variantes résident dans la manière de déterminer la durée de vie, pour un cycle extrait de la séquence multiaxiale, de tous les plans matériels afin de calculer et de cumuler le dommage facette par facette.

a) Première proposition

La première idée développée conserve totalement l'esprit du critère de type plan critique, à savoir que l'on recherche la (ou les) facette critique de normale h_c sur laquelle le critère donne $E_h = 1$. Cette dernière est associée à la facette qui, parmi les 209 existantes, la contient (figure III.14). On peut facilement déterminer très précisément l'orientation de h_c pour calculer tout aussi précisément la durée de vie du matériau pour le cycle considéré. Sachant que l'information du dommage par plan est mémorisée pour 209 facettes représentatives (la demi-sphère est maillée en 209 zones d'aires équivalentes), la durée de vie de la facette de normale h_i représentative de la zone à laquelle appartient h_c (figure II.14) est prise égale à celle calculée pour le plan de normale h_c .

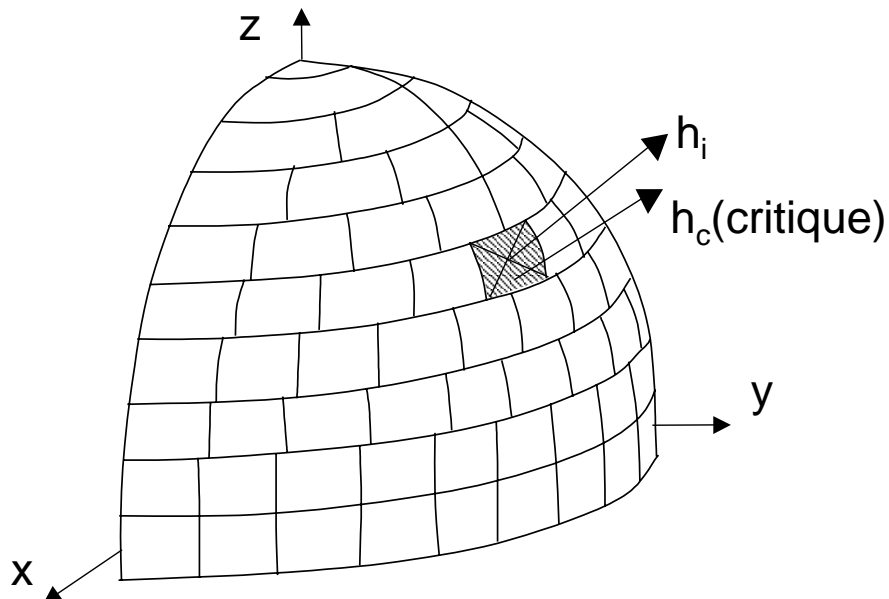


Figure III.14. Plan critique de normale h_c associé à l'une des 209 facettes.

La durée de vie N_c étant connue (elle a été calculée en résolvant l'équation $E_{RB} = 1$ sur le plan de normale h_c) et le dommage sur la facette de normale h_i vaut $d_c = 1/N_c$ (selon Miner). Ensuite sont calculés les indicateurs d'endommagement E_h sur les 208 autres facettes avec les mêmes coefficients de calage que ceux qui ont conduit à $E_{h_c} = E_{RB} = 1$ sur la facette critique. Pour toute autre facette nous avons $E_h \leq 1$. Nous attribuons alors à chacune des 208 facettes un dommage égal à une fraction de celui de la facette critique et proportionnel à leur indicateur de dommage propre E_h , soit :

$$d_h = E_h \times d_c = \frac{E_h}{N_c} \quad (\text{III.22})$$

Cycle après cycle, le dommage est déterminé et cumulé plan par plan selon ce même principe. Quand la séquence de chargement a été entièrement examinée (tous les cycles ont été traités), le plan qui cumule le plus de dommage constitue le plan d'amorçage de la fissure. Il détermine à la fois la durée de vie du matériau et l'orientation de la fissure.

Cette première proposition présente l'avantage de ne pas pénaliser les temps de calcul. Son inconvénient majeur est d'évaluer le dommage des facettes non critiques par une simple proportionnalité, mode de calcul qui n'est pas régi par un modèle de comportement physique et ne se justifie donc pas comme tel. De plus elle n'est applicable qu'avec la seule loi d'endommagement de Miner et ne peut s'adapter à d'autres lois.

b) Deuxième proposition

Il s'agit en fait de chercher et de trouver une méthode qui puisse corriger les insuffisances de la première proposition. En effet, si le concept du dommage par plan semble réaliste, sa mise en œuvre doit s'appuyer sur une démarche physique. Dans ce contexte, tout en conservant la formulation initiale de l'indicateur de dommage par plan, l'idée développée consiste à ne plus rechercher de facette critique (maximisation de l'indicateur d'endommagement E_h en fonction de l'orientation du plan) mais de déterminer la durée de vie de chacune des 209 facettes en utilisant le principe de détermination de la durée de vie d'un plan comme s'il s'agissait du plan critique. Si l'on considère que les

facettes subissent toutes un dommage, il s'agit donc de résoudre pour chaque plan l'équation suivante :

$$E_h(N) = 1 \quad (\text{III.23})$$

Cela revient à dire que chaque plan peut être vu comme un plan critique potentiel : soumis à un chargement cyclique similaire à celui engendré par le cycle multiaxial considéré, il subit un dommage progressif pouvant conduire à l'amorçage d'une fissure après un certain nombre de répétitions de ce cycle. Nous sommes ainsi capables de déterminer la durée de vie de toutes les facettes cycle après cycle. Le dommage induit par un cycle n'est donc plus considéré de façon globale au point de la structure où est réalisé le calcul en fatigue, mais il devient directionnel, c'est à dire dépendant de l'orientation du plan considéré passant par ce point. Un plan fortement sollicité conduit à une durée de vie plus faible que celle d'un plan d'orientation voisine et moins sollicité lors du cycle de chargement. Pour un autre cycle, différent du précédent, il est possible et même très probable d'observer des tendances inversées sur ces mêmes plans. La notion de plan critique ne pilote donc plus le dommage au point d'étude pour un cycle donné, c'est le cumul du dommage effectué plan par plan qui va définir le plan critique sur l'ensemble de la séquence de chargement. Cette approche requiert évidemment plus de temps de calcul que la première car il est nécessaire de résoudre l'équation implicite en N , $E_h = 1$, sur les 209 facettes. Un second inconvénient est que le dommage est calculé pour une orientation moyenne de chaque élément de discrétisation (maille) de la sphère. En effet il existe une infinité de facettes et le fait de n'en retenir que 209, même si leurs orientations sont réparties de manière homogène, peut avoir pour conséquence de minorer le dommage. Afin de mieux corriger cet inconvénient nous avons étudié la possibilité d'augmenter le nombre de facettes en conservant le principe des aires équivalentes. Cela se fait bien sûr au détriment des temps de calcul.

En résumé, l'avantage principal de cette approche est de préserver le sens physique du critère de fatigue initial, à savoir que ce sont les contraintes qui agissent sur un plan donné qui déterminent son endommagement.

c) Troisième proposition

La modélisation de l'ensemble des plans que nous avons définis est obtenue en maillant une sphère de rayon unité en éléments de surface d'aires équivalentes. Le centre de chaque maille définit l'orientation moyenne de la normale h à la facette représentative de cette maille. Une maille contient alors un faisceau de directions qui sont autant de plans possibles d'étude (figure III.15).

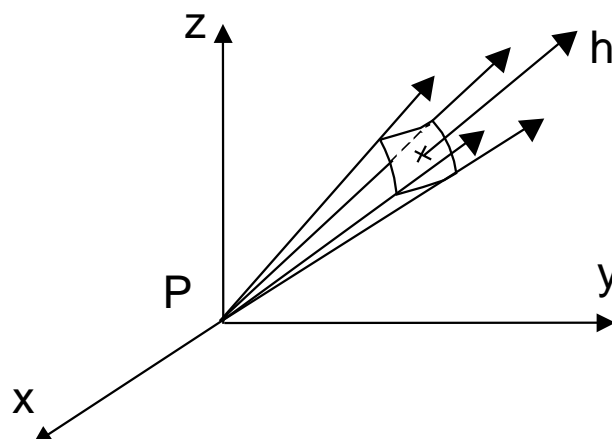


Figure III.15. Faisceau de directions normales à l'élément de discrétisation de la sphère de normale moyenne h .

La facette de normale h est censée représenter l'ensemble des plans dont les normales sont contenues dans le faisceau. Cependant le résultat obtenu par la deuxième proposition, en terme de durée de vie ou de dommage, ne correspond pas forcément à la valeur la plus conservatrice contenue dans le faisceau de directions. Cette remarque nous conduit donc à une troisième proposition, dont la démarche est relativement semblable à celle exposée dans la proposition précédente à la différence près suivante : le dommage représentatif de la facette correspond à celui du plan le plus sollicité parmi ceux ayant leur normale contenue dans le faisceau. Pour chaque maille (ou élément de discrétisation) de la sphère nous balayons les normales contenues dans le faisceau afin de localiser, par le calcul de l'indicateur d'endommagement, le plan le plus sollicité. Il s'agit concrètement de rechercher, pour tout cycle de contraintes, le plan présentant l'indicateur le plus élevé et dont la normale appartient au faisceau de normales de l'élément de discrétisation (figure III.16).

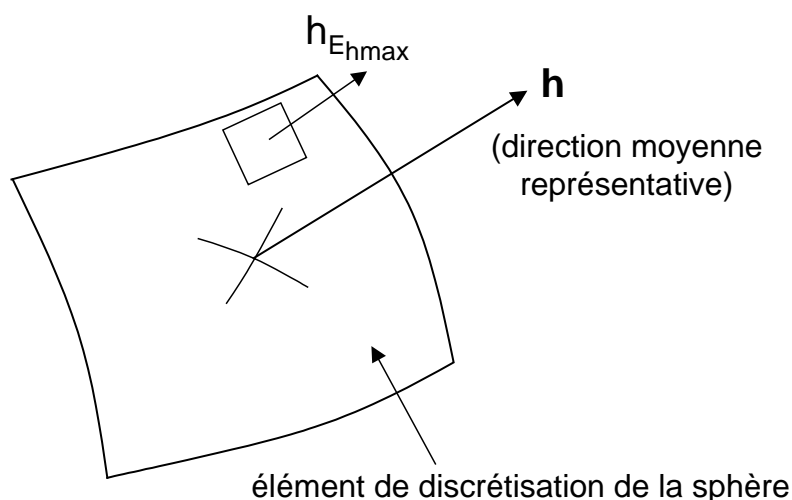


Figure III.16. Plan d'indicateur d'endommagement maximum dans l'élément de discrétisation de normale moyenne h .

Nous résolvons ensuite l'équation $E_{h_{max}} = 1$ pour connaître la durée de vie et donc le dommage du cycle de contraintes qui sont alors associés à la facette de normale h . Cette opération est répétée sur les 209 facettes et cycle après cycle. Le dommage est cumulé facette par facette. Le plan ayant cumulé le plus fort dommage correspond au plan critique et il fournit la durée de vie et l'orientation du plan d'amorçage de la fissure pour la séquence entière.

L'inconvénient majeur de cette démarche concerne le temps de calcul. Le fait de rechercher dans la zone de discrétisation entourant chaque facette l'orientation qui procure l'indicateur d'endommagement maximum, ajouté à l'analyse en fatigue de toutes les facettes, alourdit considérablement les temps de calcul. Un autre inconvénient est que lorsqu'un maximum de l'indicateur est obtenu pour une direction proche de la frontière d'une ou de plusieurs zones de discrétisation (quatre dans le pire des cas), le dommage sera évalué à un niveau quasi identique pour les différentes facettes concernées, ce qui n'est pas forcément représentatif du dommage qu'elles subissent réellement en moyenne.

III.2.2.2 Présentation complète de l'approche retenue

Après avoir programmé et comparé les trois propositions décrites précédemment, nous avons retenu la deuxième approche. Cette dernière est un juste compromis entre les temps de calcul numérique et la réalité physique du phénomène d'endommagement par fatigue. De plus, l'approche est souple puisque nous pouvons choisir la finesse de la

modélisation en augmentant ou en diminuant à loisir le nombre de facettes de la sphère de rayon unité d'après le principe des aires équivalentes. Cette fonctionnalité permet de trouver l'accord optimal entre le degré de finesse de l'analyse et les temps de traitement.

Le principe du dommage par plan définit une nouvelle méthode d'estimation de durée de vie en fatigue multiaxiale aléatoire. Les principales étapes de la méthode classique sont reprises (figure III.17). Ainsi l'identification et l'extraction de cycles multiaxiaux de la séquence multiaxiale en contraintes restent inchangées. Nous utilisons la même variable de comptage, c'est à dire la contrainte normale à un plan physique fixe déterminé au préalable, pour traiter le problème du comptage des cycles multiaxiaux. La méthode de comptage est la méthode Rainflow normalisée.

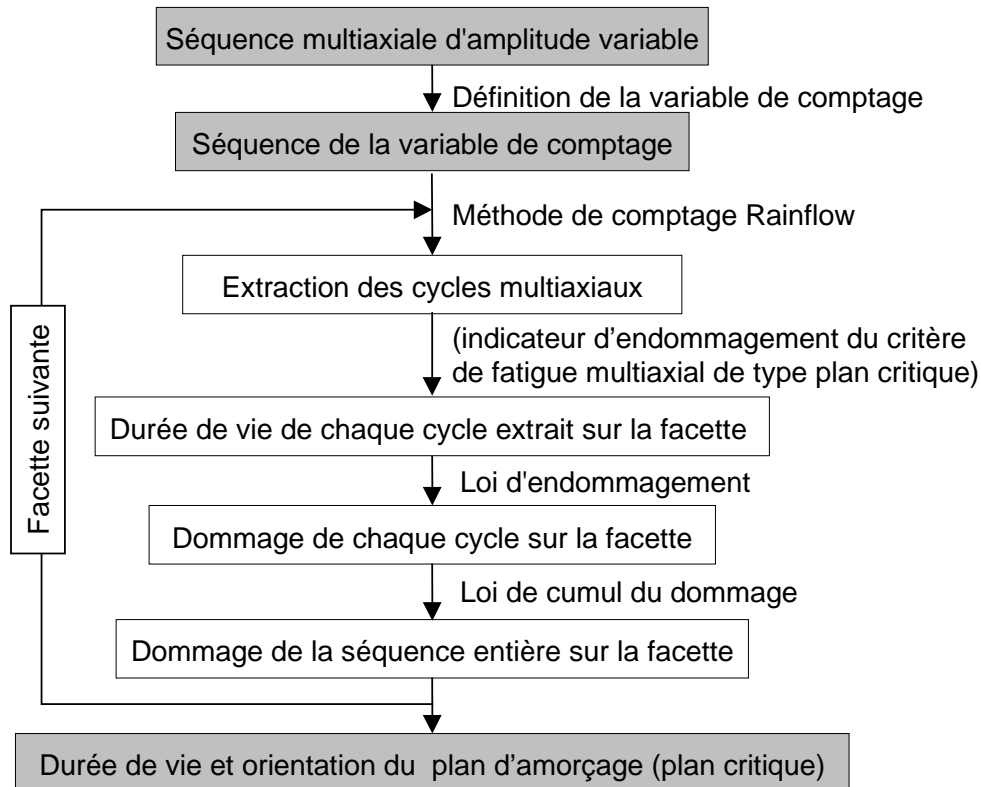


Figure III.17. Synoptique de la méthode du dommage par plan.

Les particularités de cette nouvelle approche se distinguent par deux points :

- La modélisation de la sphère en éléments de discrétisation est variable de par leur nombre. Nous conservons le principe d'une distribution des facettes d'aires équivalentes et le maillage dépend maintenant du paramètre angulaire $\Delta\gamma$. Nous ne considérons qu'une demi-sphère étant donnée la symétrie centrale du vecteur contrainte défini sur le plan de normale h par $\phi_h = [\sigma_{ij}]\{h\}$. Le découpage est réalisé de la façon suivante : les facettes sont repérées par deux angles φ et γ (figure III.18). Les pôles, au nombre de deux, sont définis par $\gamma = 0^\circ$ et $\gamma = 180^\circ$ (l'un d'entre eux seulement est utilisé pour les calculs).

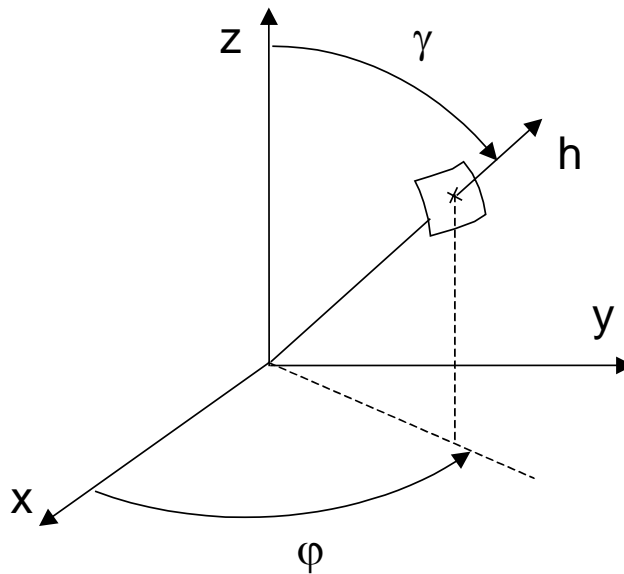


Figure III.18. Définition d'une facette par les angles φ et γ .

Nous découpons la demi-sphère en couronnes espacées régulièrement d'un pas angulaire $\Delta\gamma$. Sur les pôles se trouvent alors deux demi-calottes sphériques d'angle au centre $\Delta\gamma$. La figure III.19 présente le découpage en couronnes d'un quart supérieur de la demi-sphère pour un pas angulaire $\Delta\gamma$ égal à 10° .

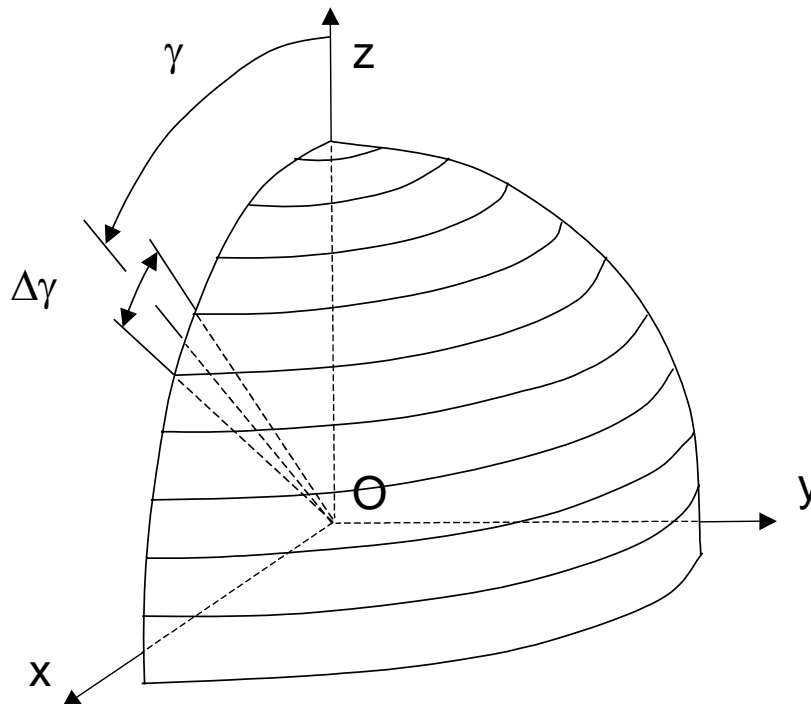


Figure III.19. Découpage de la demi-sphère en couronnes ($\Delta\gamma=10^\circ$).

Il suffit ensuite de découper chaque couronne par des lignes méridiennes de façon à obtenir des aires semblables. Le pas angulaire de découpage est noté $\Delta\gamma$ dans le plan (x, z) ; celui mesuré dans un plan parallèle à (O, x, y) est noté $[\Delta\varphi]_\gamma$. Il est variable en fonction de l'angle γ et est

égal à $\Delta\gamma$ pour la valeur particulière $\gamma = 90^\circ$ (c'est à dire dans le plan de l'équateur). On a donc :

$$[\Delta\varphi]_{\gamma=90^\circ} = \Delta\gamma \quad (\text{III.24})$$

Du point de vue de la terminologie, on assimile chaque maille de la sphère à la facette normale à la direction moyenne de la maille en question.

L'aire d'une facette dont la normale est contenue dans le plan (O, x, y) est notée $A_{\text{référence}}$ et elle définit, comme son nom l'indique, l'aire de référence, aire de la couronne centrée sur l'équateur divisée par le nombre de facettes sur l'équateur. On a ainsi :

$$A_{\text{référence}} = \frac{\pi \int_{\frac{\pi-\Delta\gamma}{2}}^{\frac{\pi+\Delta\gamma}{2}} \sin\alpha d\alpha}{[\Delta\varphi]_{\gamma=90^\circ}} = \frac{2\pi \sin\frac{\Delta\gamma}{2}}{\frac{\pi}{\Delta\gamma}} = 2\Delta\gamma \sin\frac{\Delta\gamma}{2} \quad (\text{III.25})$$

L'aire de référence qui est définie ne dépend que du pas angulaire $\Delta\gamma$. On fait en sorte que le nombre de couronnes soit entier, c'est à dire pratiquement que $\Delta\gamma$ (en degrés) soit un diviseur de 90° . Pour la couronne centrée sur un parallèle d'inclinaison γ , nous déduisons le pas de découpage $\Delta\varphi$ à appliquer pour obtenir des aires A_γ des facettes de cette couronne égales à $A_{\text{référence}}$, c'est à dire en posant :

$$A_\gamma = A_{\text{référence}} \quad (\text{III.26})$$

Soit :

$$\frac{\pi \int_{\gamma-\frac{\Delta\gamma}{2}}^{\gamma+\frac{\Delta\gamma}{2}} \sin\alpha d\alpha}{\frac{\pi}{\Delta\varphi}} = A_{\text{référence}} \quad (\text{III.27})$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta\varphi \sin\gamma \sin\frac{\Delta\gamma}{2} = 2\Delta\gamma \sin\frac{\Delta\gamma}{2} \quad (\text{III.28})$$

D'où :

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\gamma}{\sin\gamma} \quad (\text{III.29})$$

Remarque : en réalité, chaque couronne de la sphère est découpée en un nombre entier de facettes. Concrètement on choisit pour déterminer ce nombre l'entier le plus proche de $\pi/\Delta\varphi$. Les aires des éléments de discrétisation (facettes) ne sont donc plus tout à fait identiques mais quasi-

équivalentes dans le sens où elles sont de même ordre de grandeur. Cependant nous parlerons toujours d'aires équivalentes.

Seules les aires des deux demi-calottes sphériques, associées aux pôles ne sont pas égales à $A_{référence}$. Elles valent :

$$A_{\gamma=0^\circ} = A_{\gamma=180^\circ} = \pi \int_0^{\frac{\Delta\gamma}{2}} \sin \alpha d\alpha = \pi \left(1 - \cos \frac{\Delta\gamma}{2} \right) \quad (III.30)$$

Grâce à ce découpage en fonction du paramètre $\Delta\gamma$, nous obtenons une discrétisation de la sphère de rayon unité en éléments d'aires équivalentes, à l'exception des pôles (la figure III.5 présente le maillage réalisé avec un pas $\Delta\gamma$ de 10°). En résumé, la sphère de rayon unité qui permet de modéliser l'ensemble des plans physiques est discrétisable en un nombre fini de facettes d'aires pratiquement identiques. La discrétisation est paramétrée à l'aide du pas angulaire $\Delta\gamma$. Le tableau III.6 suivant donne le nombre de facettes obtenues en fonction du paramètre $\Delta\gamma$.

$\Delta\gamma$	3°	5°	6°	9°	10°	15°	18°	30°
Nbre de facettes	2293	823	571	255	209	91	65	23

Tableau III.6. Nombre de facettes explorées (ou examinées) en fonction du paramètre $\Delta\gamma$.

- Le deuxième point concerne le critère de fatigue utilisé. Comme déjà précisé, l'estimation des durées de vie, facette par facette, et pour n'importe quel type de cycle, repose sur un critère de type plan critique. Nous utilisons celui de Robert, et plus précisément son indicateur d'endommagement par plan E_h uniquement.

$$E_h = \text{Max}_t \left(\frac{\tau_{ha}(t) + \alpha(N)\sigma_{hha}(t) + \beta(N)\sigma_{hhm}}{\theta(N)} \right) \quad (III.31)$$

L'indicateur d'endommagement E_h lié au plan de normale h correspond à la valeur maximale, au cours d'un cycle de contraintes, de la combinaison linéaire des contraintes tangentielle et normale alternées, et de la contrainte normale moyenne agissant sur ce plan. La figure III.20 donne une représentation graphique de ces termes de contraintes qui interviennent dans la formulation de E_h . Sur cette figure, nous avons fait figurer un plan P de normale h sur lequel est projeté le vecteur contrainte $\phi_h(t)$ pris à un instant t d'un cycle de contraintes. Afin de bien illustrer les différentes composantes du cisaillement, nous avons construit la projection du vecteur contrainte sur le plan P au cours du cycle. Cette courbe constitue le trajet de charge et le plus petit cercle qui lui est circonscrit permet de définir la contrainte moyenne de cisaillement τ_{hm} (centre du cercle), la partie alternée de la contrainte de cisaillement $\tau_{ha}(t)$ et l'amplitude de la contrainte de cisaillement τ_{ha} (rayon du cercle).

La contrainte normale moyenne $\sigma_{h_{hm}}$ et la partie alternée $\sigma_{h_{ha}}(t)$ de la contrainte normale $\sigma_{hh}(t)$ se déduisent simplement des extremums et de la valeur de cette contrainte normale et de ses extremums atteints au cours du cycle :

$$\sigma_{h_{hm}} = \frac{\sigma_{hh_{max}} + \sigma_{hh_{min}}}{2} \quad (III.32)$$

$$\sigma_{h_{ha}}(t) = \sigma_{hh}(t) - \sigma_{h_{hm}} \quad (III.33)$$

Les coefficients $\alpha(N)$, $\beta(N)$ et $\theta(N)$ sont obtenus à l'aide des trois courbes S-N du matériau $\sigma_{-1}(N)$, $\sigma_0(N)$ et $\tau_{-1}(N)$, obtenues respectivement en traction alternée symétrique, en traction répétée et en torsion alternée symétrique. Pour les déterminer, on écrit que le critère est vérifié pour les trois limites de fatigue à N cycles du matériau. En d'autres termes, nous devons toujours vérifier que sur le plan critique du matériau propre à chacun de ces essais de base de la fatigue on a $E_n = 1$. Le critère de Robert, dans sa version adaptée au dommage par plan, conduit exactement aux mêmes constantes de calage que dans sa version initiale car ces coefficients traduisent la pondération des trois contraintes impliquées dans l'endommagement ($\tau_{ha}(t)$, $\sigma_{h_{ha}}(t)$, $\sigma_{h_{hm}}$) pour la durée de vie considérée.

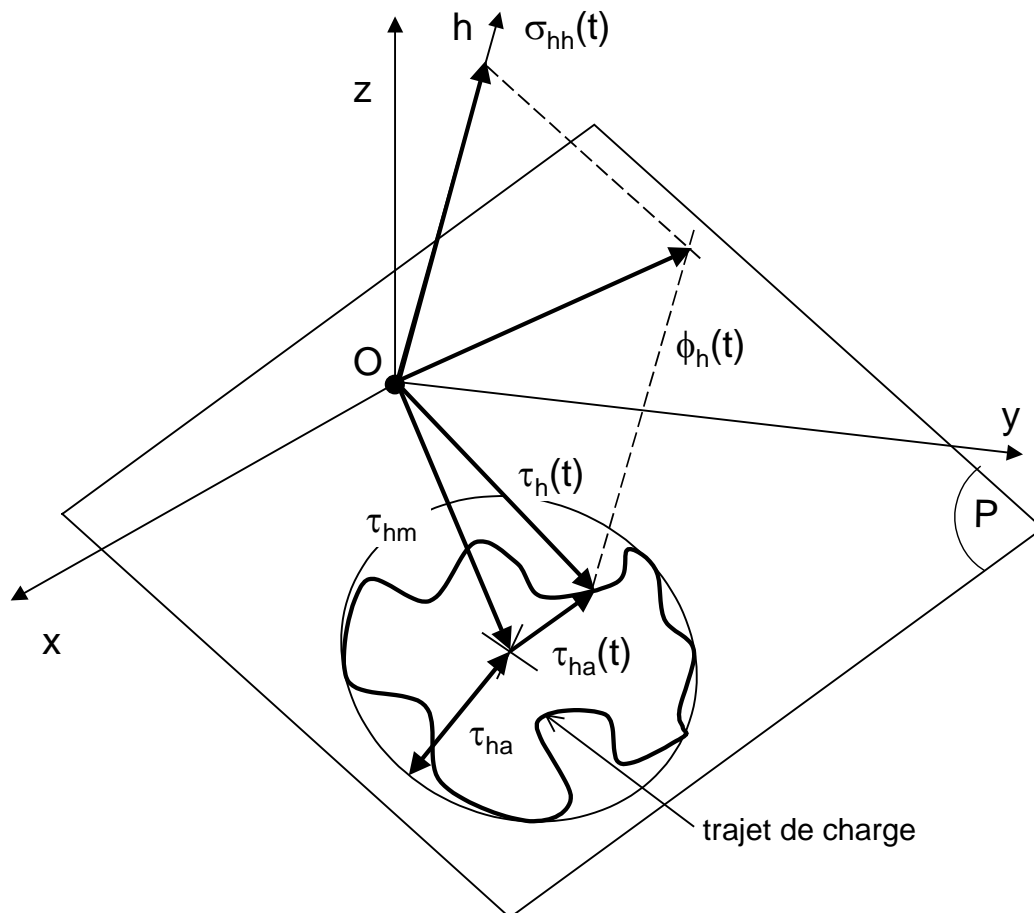


Figure III.20. Représentation graphique des paramètres des contraintes agissant sur une facette de normale h au cours du cycle.

Pour un cycle de contrainte uniaxiale simple, le plan cumulant le plus de dommage est celui obtenu par maximisation de E_h sur l'ensemble des plans possibles (c'est à dire : $E_{RB} = \text{Max}_h E_h$). Les trois équations issues du calage du critère sur les trois essais de base de la fatigue, donnent, rappelons-le, après résolution du système :

$$\alpha(N) = \frac{\frac{\tau_{-1}(N)}{\sigma_{-1}(N)} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\tau_{-1}(N)}{\sigma_{-1}(N)} \left(1 - \frac{\tau_{-1}(N)}{\sigma_{-1}(N)}\right)}}$$

$$\theta(N) = \tau_{-1}(N) \sqrt{\alpha(N)^2 + 1} \quad (\text{III.34})$$

$$\beta(N) = \frac{2\theta(N)}{\sigma_0(N)} - \frac{\sigma_0(N)}{8\theta(N)} - \alpha(N)$$

avec les conditions de validité suivantes :

$$\frac{1}{2} < \frac{\tau_{-1}(N)}{\sigma_{-1}(N)} < 1 \text{ et } \frac{1}{2} < \frac{\sigma_{-1}(N)}{\sigma_0(N)} < 1 \quad (\text{III.35})$$

Une fois ceci établi, l'utilisation du critère est simple. L'ensemble des facettes données par la discrétisation est passé en revue et à cette occasion est calculée la durée de vie du matériau pour chaque cycle extrait de la séquence multiaxiale. Ensuite est déterminé et cumulé le dommage, cycle après cycle. Autrement dit, à chaque cycle issu de la séquence en contraintes l'équation implicite en N ($E_h=1$) est résolue facette par facette, après quoi l'endommagement de chacune d'entre elles est cumulé indépendamment.

III.2.2.3 Validation de la méthode basée sur le dommage par plan

Les particularités de cette nouvelle approche ayant été exposées, la validation expérimentale est maintenant présentée. Nous utilisons ici aussi l'ensemble des données expérimentales fournies par le Professeur Macha de l'Université Technique d'Opole. Deux types de simulation ont été mises en œuvre, l'une par le biais de la méthode classique avec le critère de Robert, l'autre par l'intermédiaire de la nouvelle méthode du dommage par plan. La sphère de rayon unité a été discrétisée en 209 facettes (c'est à dire avec un pas angulaire $\Delta\gamma$ de 10°). Deux lois d'endommagement sont utilisées, celle de Miner et celle de Lemaitre et Chaboche (avec $\beta = 4,5093$ et $aM_0^{-\beta} = 2,7135 \times 10^{-17}$). Les résultats expérimentaux et numériques sont présentés dans les tableaux III.7 et III.8 ci-dessous. Nous avons calculé les rapports entre les durées de vie expérimentales et celles estimées par calcul. Ces rapports nous permettent de comparer la nouvelle approche du dommage par plan à la démarche classique pour chacune des deux lois de dommage utilisées.

Pour la loi de dommage de Miner :

Séquence	Durée de vie expérimentale	Durée de vie calculée Méthode classique		Durée de vie calculée Dommage par plan	
	Nbre de répétitions	Nbre de répétitions	Rapport $N_{exp.}/N_{num.}$	Nbre de répétitions	Rapport $N_{exp.}/N_{num.}$
GP9302	3273	5141	0.6366	6515	0.5024
GP9305	287	188	1.5266	206	1.3932
GP9307	398	652	0.6104	710	0.5605
GP9308	875	504	1.7361	522	1.6762
GP9310	1301	593	2.1939	701	1.8559
GP9312	2468	971	2.5417	1131	2.1821
GP9313	1664	671	2.4799	702	2.3704
GP9314	848	322	2.6335	357	2.3753
GP9315	267	28	9.5357	29	9.2069
GP9619	342	308	1.1104	354	0.9661
	Moyenne des rapports		2.5005		2.3089

Tableau III.7. Comparaison des durées de vies obtenues par la méthode classique et celle du dommage par plan pour la loi de Miner.

Pour la loi de dommage de Lemaitre et Chaboche :

Séquence	Durée de vie expérimentale	Durée de vie calculée Méthode classique		Durée de vie calculée Dommage par plan	
	Nbre de répétitions	Nbre de répétitions	Rapport $N_{exp.}/N_{num.}$	Nbre de répétitions	Rapport $N_{exp.}/N_{num.}$
GP9302	3273	649	5.0431	743	4.4051
GP9305	287	129	2.2248	141	2.0355
GP9307	398	416	0.9567	554	0.7184
GP9308	875	368	2.3777	387	2.2610
GP9310	1301	389	3.3445	456	2.8531
GP9312	2468	609	4.0525	724	3.4088
GP9313	1664	547	3.0420	600	2.7733
GP9314	848	238	3.5630	269	3.1524
GP9315	267	18	14.8333	19	14.0526
GP9619	342	166	2.0602	190	1.8000
	Moyenne des rapports		4.1498		3.7460

Tableau III.8. Comparaison des durées de vie obtenues par la méthode classique et celle du dommage par plan pour la loi de Lemaitre et Chaboche.

Ces deux tableaux récapitulent les résultats de calculs bruts. Les figures III.21 et III.22 donnent une représentation graphique de ces résultats obtenus respectivement selon

Miner et Lemaitre et Chaboche. Les durées de vie expérimentales et calculées sont exprimées dans tous les cas en nombre de séquences.

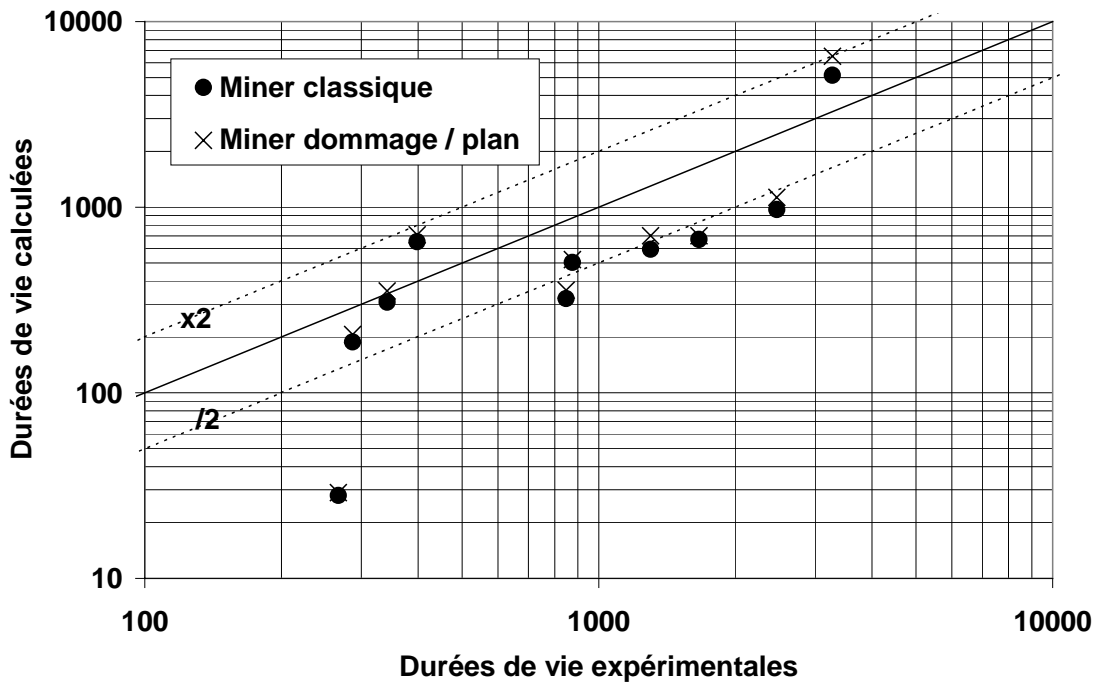


Figure III.21. Résultats obtenus avec la loi d'endommagement de Miner.

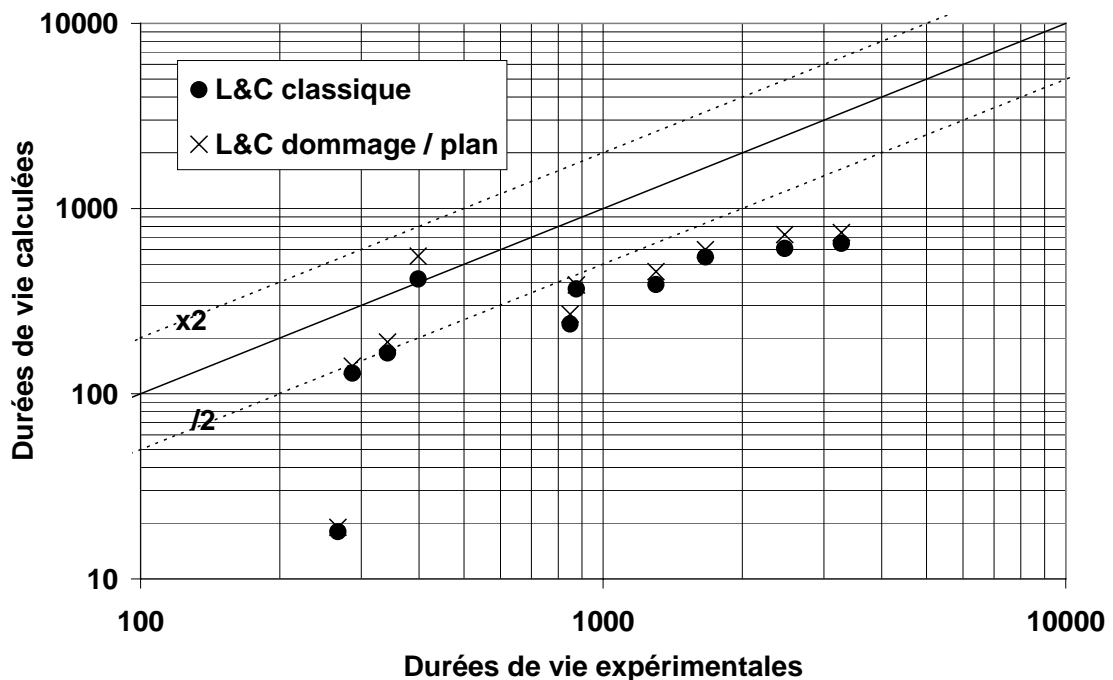


Figure III.22. Résultats obtenus avec la loi d'endommagement de Lemaitre et Chaboche.

Les valeurs données par la méthode du dommage par plan sont globalement plus proches des valeurs expérimentales. En effet la moyenne des rapports durée de vie expérimentale-durée de vie calculée, quelle que soit la loi d'endommagement employée, montre une amélioration dans l'estimation des durées de vie. En ce qui concerne la loi de Miner, la moyenne des rapports passe de 2.5 pour l'approche classique à 2.31 lorsque la méthode du dommage par plan est mise en œuvre. Le gain est un peu plus important pour la

loi d'endommagement non linéaire de Lemaitre et Chaboche, mais il était davantage nécessaire aussi, puisque nous passons d'une moyenne de 4.15 par la méthode classique à une moyenne de 3.75 par celle du dommage par plan.

Les résultats et les tendances observées ne sont pas incohérents au regard du principe du dommage par plan, et plus particulièrement des hypothèses sur lesquelles il repose. Si, pour chaque cycle extrait le plan critique est toujours le même, alors la durée de vie calculée par la méthode du dommage par plan, est identique à celle obtenue par la méthode classique. Dans tous les autres cas le dommage de n'importe quel plan physique sera plus faible que la somme des dommages subis par le plan critique propre à chaque cycle. A dommage plus faible, on obtient donc des durées de vie plus grandes et qui se rapprochent ainsi de celles observées expérimentalement.

Cette modélisation du phénomène d'endommagement plan par plan indique la durée de vie du composant soumis à un chargement complexe, c'est à dire de type multiaxial aléatoire, et donne aussi l'orientation de la fissure macroscopique qui naît, puisque l'amorçage a lieu sur le premier plan qui présente un dommage cumulé égal à l'unité.

Dans les modèles utilisés, le matériau est supposé homogène et isotrope. Dans un élément de volume, à l'échelle de quelques grains, ce n'est pas le cas dans la réalité et les caractéristiques de fatigue du matériau peuvent évoluer. De même, le matériau peut avoir été endommagé par le procédé de mise en forme, ou présenter une moindre résistance à la fatigue de par un défaut comme une inclusion par exemple.

Le principe du dommage par plan nous permet d'obtenir une visualisation du dommage en fonction de l'orientation des plans (plus exactement en pratique de l'orientation des normales à ces plans). La distribution du dommage autour du point d'étude présentée figure III.23 correspond au dommage cumulé plan par plan pour la séquence biaxiale aléatoire GP9310 selon la règle de Miner. Cette figure montre que quatre plans sont identiquement endommagés au niveau maximal. Au voisinage de l'un de ces plans, la présence d'un défaut peut engendrer l'amorçage d'une fissure qui ne correspondra pas exactement au plan de rupture déterminé selon la méthode du dommage par plan. De la même façon, en supposant que le matériau est parfait, il n'est pas possible par la méthode proposée de distinguer parmi ces quatre plans celui sur lequel la fissure va s'amorcer en priorité.

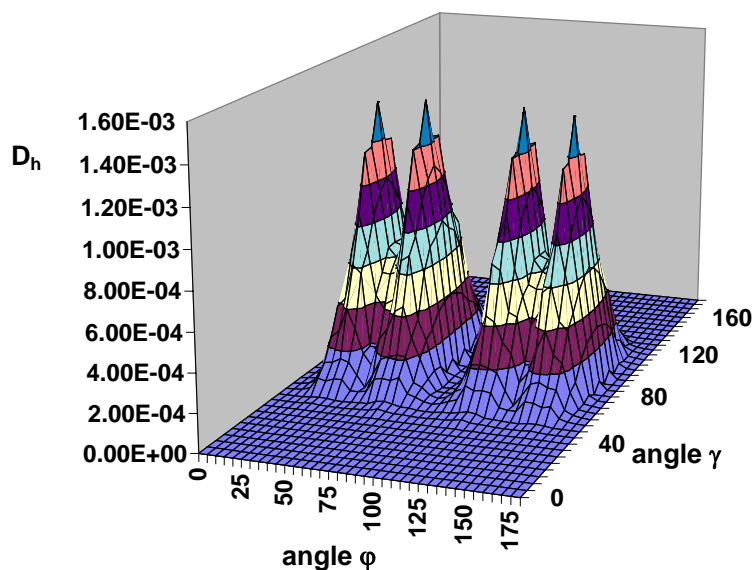


Figure III.23. Distribution du dommage obtenue pour la séquence GP9310 (par Miner).

La figure III.24 présente la distribution du dommage pour la séquence GP9313 toujours selon la règle de Miner. Nous observons deux plans d'endommagement maximum

équivalent et deux plans d'endommagement identique mais à un niveau moindre. Pour cet exemple l'amorçage peut très bien apparaître sur une des deux facettes moins endommagées si un défaut se situe à leur voisinage bien qu'elles ne soient pas les plus sollicitées au sens du dommage par plan, car cette méthode ne tient pas compte de la présence éventuelle de défaut. Si le matériau est parfaitement isotrope, l'amorçage de fissure a lieu sur l'une ou l'autre des deux facettes les plus endommagées.

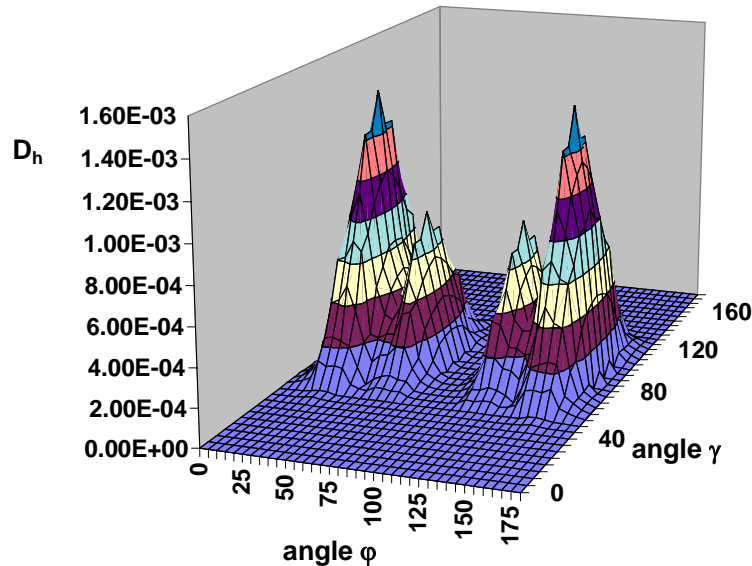


Figure III.24. Distribution du dommage obtenue pour la séquence GP9313 (par Miner).

Les figures III.23 et III.24 donnent donc une cartographie de l'orientation du dommage selon la loi de Miner. Les mêmes séquences, lorsqu'elles sont traitées avec la loi d'endommagement de Lemaitre et Chaboche conduisent à des distributions sensiblement identiques à quelques exceptions près. La figure III.25 donne la cartographie du dommage obtenue avec cette loi non linéaire pour la séquence GP9310. Les quatre plans ne sont plus ici équi-endommagés. Seuls les deux plans centraux sur la distribution, correspondant à $\varphi=60^\circ$ ou $\varphi=120^\circ$ et $\gamma=90^\circ$, sont les plus sollicités. La distribution obtenue avec la loi non linéaire pour la séquence GP9313 donne quant à elle les mêmes résultats, en terme de plans critiques, que ceux obtenus avec la loi linéaire de Miner.

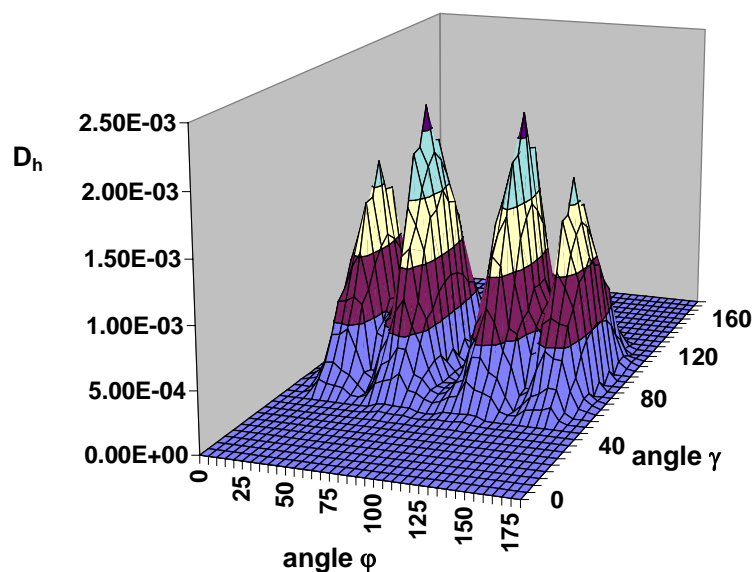


Figure III.25. Distribution du dommage obtenue pour la séquence GP9310 avec la loi d'endommagement de Lemaitre et Chaboche.

En résumé, les informations contenues dans la distribution du dommage sont multiples. Elles renseignent sur le potentiel d'amorçage d'une fissure sur n'importe quelle facette. Ainsi le principe du dommage par plan fournit-il un outil d'analyse de l'endommagement du matériau soumis à une séquence multiaxiale aléatoire par le biais du couple durée de vie – orientation du plan d'amorçage possible d'une fissure. Les résultats expérimentaux obtenus par le Professeur Macha sont issus d'un seul essai à chaque fois et ils ne sont donc pas le résultat d'une analyse statistique de plusieurs cas de fissuration acquis pour une même séquence de chargement. Il apparaît donc nécessaire de valider la nouvelle méthode du dommage par plan sur d'autres cas réels et plus particulièrement sur des cas industriels, avec à chaque fois si possible plusieurs essais conduits d'une manière identique afin de discerner la dispersion propre au matériau de l'écart intrinsèque de la méthode proposée entre ses prévisions et le comportement réel en fatigue.

Le critère de type plan critique de Robert a donc été adapté afin de réaliser le calcul et le cumul du dommage plan par plan. Nous nous sommes basés sur l'interprétation de l'indicateur d'endommagement du critère pour définir notre nouvelle approche. Ceci étant, d'autres critères de type plan critique peuvent servir de point de départ pour la construction de méthodes d'estimation de durée de vie mettant en œuvre le principe du dommage par plan.

III.2.3 Méthode du comptage et dommage par plan

III.2.3.1 Influence du plan de comptage

La méthode d'estimation de durée de vie développée au laboratoire et qui a été présentée précédemment emploie une variable dite de comptage. Cette variable de comptage est indispensable pour identifier les cycles multiaxiaux au sein de la séquence de chargement, à plus forte raison quand les sollicitations sont à amplitude variable. En effet, le problème de l'identification des cycles reste entier au regard d'une séquence multiaxiale aléatoire (figure III.26), car une des composantes peut connaître un cycle au sens classique du terme (variations successives jusqu'à revenir à un niveau de contrainte identique avec le même signe de variation) alors que les autres composantes suivent des évolutions différentes qui n'ont rien d'un cycle.

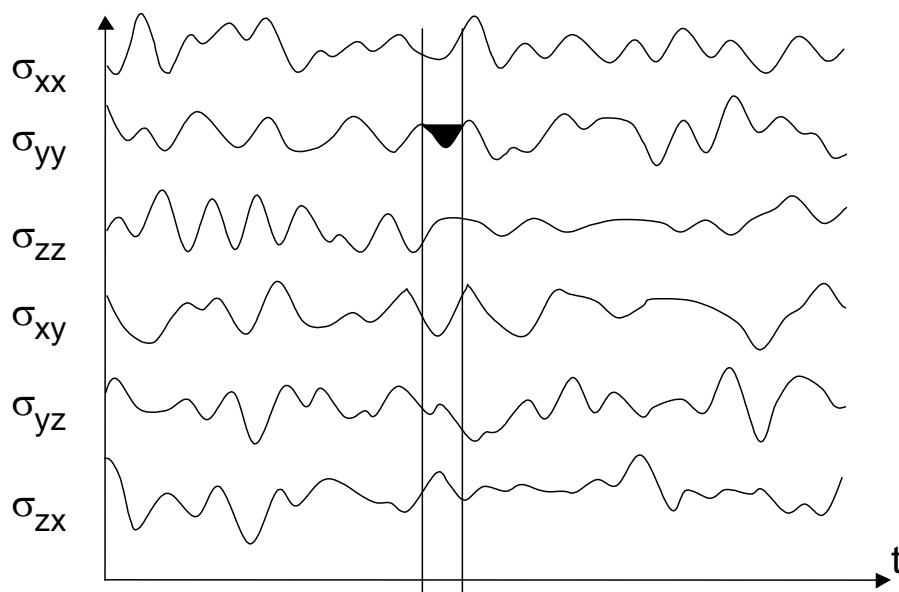


Figure III.26. Problème de l'identification d'un cycle de contrainte au sein d'une séquence multiaxiale aléatoire.

L'évolution de la variable de comptage en fonction du temps est utilisée pour caractériser l'aspect cyclique des sollicitations. On peut facilement montrer l'insuffisance de certaines variables utilisées en statique pour décrire l'aspect cyclique d'un spectre multiaxial aléatoire. Parmi ces variables, nous pouvons citer le premier invariant du tenseur des contraintes I_1 ou le second invariant du tenseur déviateur des contraintes J_2 (figure III.27).

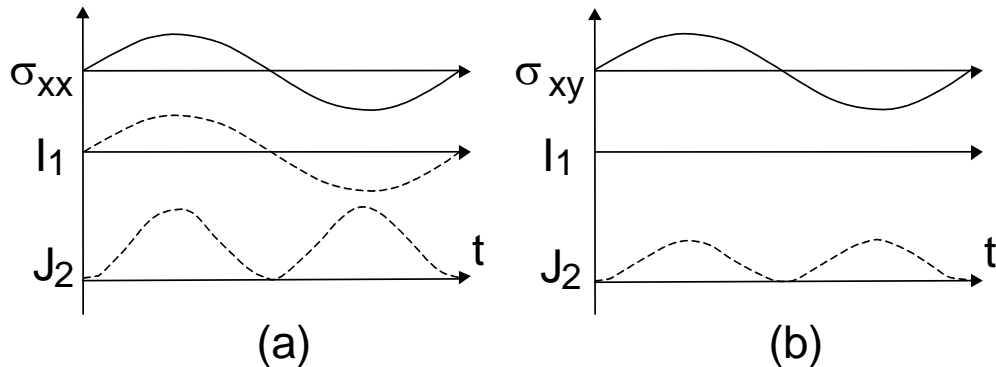


Figure III.27. Evolution des invariants I_1 et J_2 pour : (a) un cycle de traction-compression alternée symétrique, (b) un cycle de torsion alternée symétrique.

Dans le cas du cycle de traction-compression ou de torsion alternée symétrique, on observe deux périodes sur l'invariant J_2 alors qu'il n'y en a qu'une seule pour la sollicitation réelle. Dans le cas d'un cycle de torsion alternée symétrique, le premier invariant du tenseur des contraintes I_1 reste identiquement nul durant le cycle. Ces deux exemples illustrent les insuffisances des invariants I_1 et J_2 pour décrire correctement l'aspect cyclique des sollicitations et par conséquent pour servir de variable de comptage.

La variable retenue correspond à la contrainte normale $\sigma_{h_0 h_0}(t)$ sur un plan physique donné P_0 choisi de manière arbitraire (figure III.28). Cette variable franchit toutes les difficultés d'identification des cycles notamment dans les cas particuliers à condition de prendre certaines précautions. Ainsi, le plan de comptage P_0 choisi ne doit pas conduire à une variable de comptage constante lorsque le tenseur des contraintes varie au cours du temps. Le spectre de chargement fait donc l'objet d'une analyse préalable pour vérifier cette condition. L'orientation initiale de la normale au plan de comptage h_0 est initialement fixée par les angles $\varphi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$ et $\gamma_0 = \frac{\pi}{\sqrt{19}}$. En cas de non validation de la condition à vérifier,

une modification de l'orientation du plan de comptage est réalisée, cela autant de fois qu'il est nécessaire, et de la manière décrite par l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} \varphi_{0(n+1)} &= \varphi_{0(n)} \times \sqrt{\frac{17}{13}} \\ \gamma_{0(n+1)} &= \gamma_{0(n)} \times \sqrt{\frac{19}{17}} \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

Les coefficients $\sqrt{\frac{17}{13}} (= 1.143543749794)$ et $\sqrt{\frac{19}{17}} (= 0.8947368421053)$ sont proches de l'unité et, comme pour les angles initiaux φ_0 et γ_0 , ils ont été choisis de façon à présenter une partie décimale illimitée non périodique afin de dissocier facilement deux tenseurs consécutifs conduisant à des valeurs voisines de la contrainte normale

(combinaison linéaire des composantes du tenseur). Le risque de confondre deux valeurs du fait d'un arrondi numérique est ainsi très réduit.

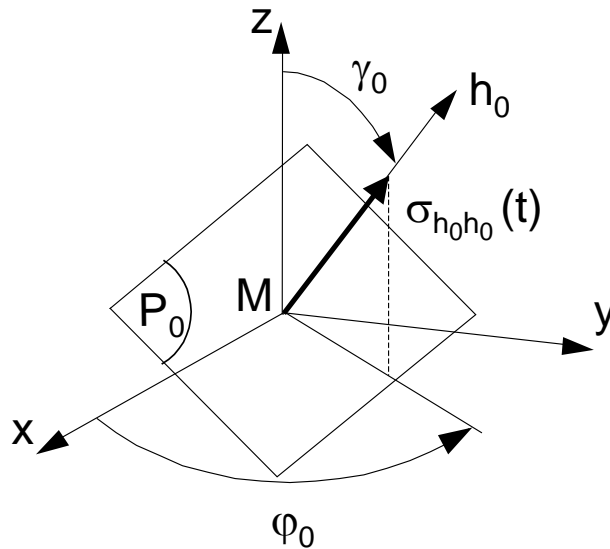


Figure III.28. Contrainte normale prise comme variable de comptage.

La méthode de comptage Rainflow est alors appliquée à la variable de comptage afin d'identifier les cycles multiaxiaux de la séquence (figure III.29). Elle permet de repérer, au sein de la séquence de chargement, les boucles d'hystérésis apparaissant dans le repère contrainte-déformation et interprétées comme des cycles de contraintes, par analogie avec ce que l'on observe dans le domaine plastique sous sollicitation cyclique.

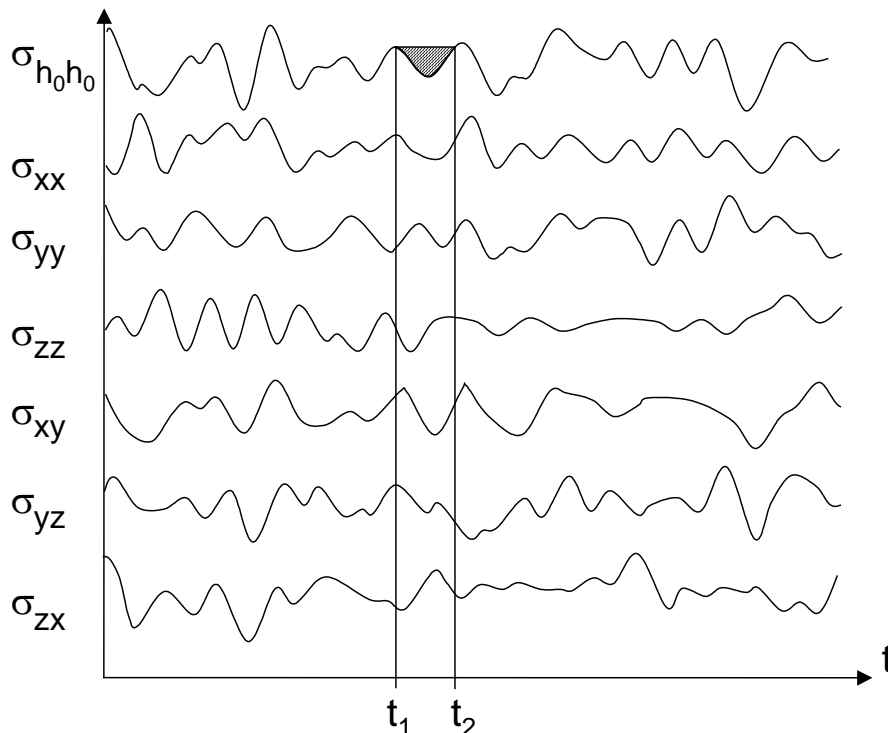


Figure III.29. Méthode de comptage Rainflow appliquée à la variable de comptage pour l'identification et l'extraction de cycles multiaxiaux.

Un cycle étant identifié au sein de la séquence de la variable de comptage $\sigma_{h_0 h_0}(t)$, le cycle multiaxial extrait de la séquence multiaxiale est constitué de l'évolution des six

composantes du tenseur des contraintes pendant l'intervalle de temps correspondant (intervalle $[t_1, t_2]$ sur la figure III.29). La variable de comptage $\sigma_{h_0 h_0}(t)$ n'est donc utilisée que pour l'identification et le comptage des cycles, la séquence multiaxiale aléatoire en contraintes fournissant les cycles eux-mêmes.

Les cycles étant extraits, nous déterminons leur durée de vie par le biais de critères de fatigue multiaxiaux. L'inconvénient majeur de la variable de comptage retenue se situe au niveau du choix du plan de comptage. Suivant le plan choisi pour effectuer le comptage des cycles (identification et extraction) le nombre et la forme des cycles extraits varient. En effet, quand la séquence est totalement aléatoire, deux plans de comptage distincts conduisent à des cycles multiaxiaux différents car issus de la séquence multiaxiale aléatoire sur des intervalles de temps différents. Les durées de vie du matériau pour ces cycles, calculées grâce au critère de fatigue, sont alors elles aussi dissemblables. Le déroulement de la méthode jusqu'à son terme, c'est à dire le calcul et le cumul du dommage, nous mène par conséquent à des durées de vie, pour la séquence entière, elles aussi différentes. En résumé les résultats des calculs de durées de vie donnés par la méthode sont dépendants du plan de comptage choisi.

Pour s'en convaincre, il suffit d'observer deux distributions de dommage obtenues par le principe du dommage par plan avec deux plans de comptage distincts. La loi d'endommagement utilisée est celle de Miner. La séquence de chargement ayant servi de support à cet exemple est biaxiale et fortement aléatoire. Elle a été fournie par M. J.-C. Clément, de l'EDF, et a approximativement les mêmes caractéristiques que les séquences du Professeur Macha qui ont permis de valider le principe du dommage par plan, tel qu'il a été vu précédemment. La figure III.30 donne la distribution du dommage avec, comme plan de comptage, le plan dont la normale est définie par les deux angles $\varphi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$ et $\gamma_0 = \frac{\pi}{\sqrt{19}}$ (exprimés en radians). La figure III.31 donne la distribution du dommage pour la même séquence mais avec un plan de comptage dont la normale est définie par : $\varphi_0 = 0$ et $\gamma_0 = \frac{\pi}{2}$.

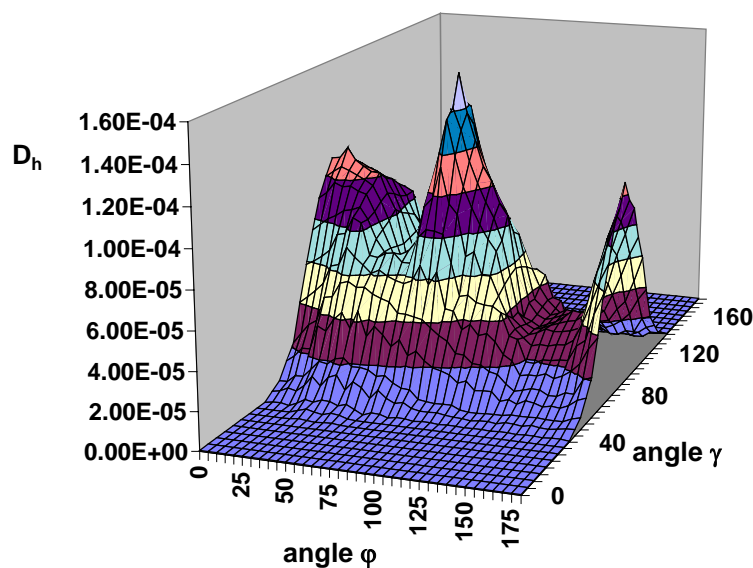


Figure III.30. Distribution du dommage pour la séquence biaxiale EDF, obtenue avec le plan de comptage de normale définie par : $\varphi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$ et $\gamma_0 = \frac{\pi}{\sqrt{19}}$.

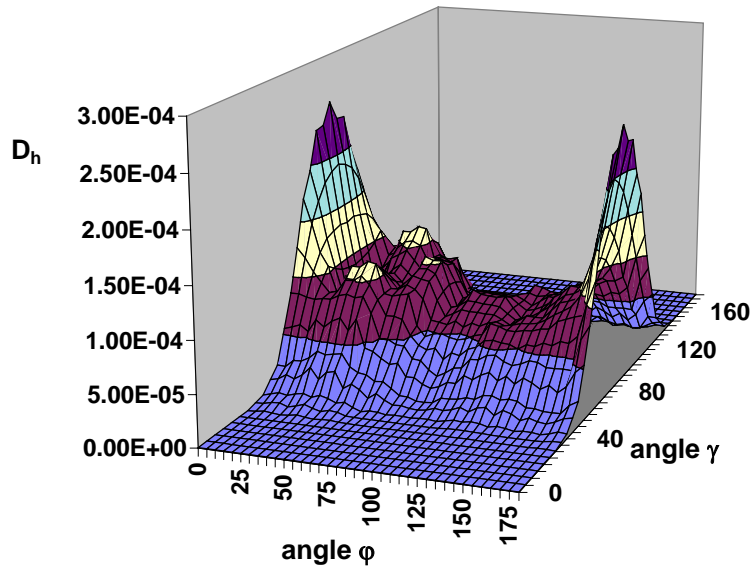


Figure III.31. Distribution du dommage pour la séquence biaxiale EDF, obtenue avec le plan de comptage de normale définie par : $\varphi_0 = 0$ et $\gamma_0 = \frac{\pi}{2}$.

Les deux figures présentent des distributions de dommage profondément différentes. Bien que le dommage soit regroupé dans les deux cas sur l'équateur ($\gamma = \pi/2$), les plans les plus endommagés, ou plans critiques, obtenus dans un cas ne correspondent pas du tout à ceux observés dans l'autre cas. Il en va de même pour les valeurs maximales du dommage atteintes dans chacun des deux cas. Pour la première variable de comptage, figure III.30, le plan critique est défini par $\varphi_{c_1} = 4\pi/9$ (80°) et $\gamma_{c_1} = \pi/2$, le dommage cumulé est $D_{c_1} = 1,5798 \cdot 10^{-4}$, ce qui correspond à une durée de vie de 6330 répétitions de la séquence avec la loi de Miner. La figure III.31 indique un plan critique défini par $\varphi_{c_2} = 0$ et $\gamma_{c_2} = \pi/2$, avec un dommage $D_{c_2} = 2,5272 \cdot 10^{-4}$. La durée de vie correspondante selon Miner est de 3957 répétitions de la séquence. Suivant le plan de comptage choisi nous observons donc une forte variation des résultats en terme de durée de vie et d'orientation du plan d'amorçage. Le rapport des durées de vie est ici de $\frac{6330}{3957} \approx 1,6$.

Les deux distributions précédentes montrent donc une dépendance très forte du plan de comptage et des durées de vie estimées par la méthode proposée. Etant donné que la méthode a été développée pour traiter des cas de chargements multiaxiaux aléatoires, il n'est guère possible d'établir des modèles mathématiques qui permettent de modéliser cette dépendance de façon générale. Dans le cas de sollicitations multiaxiales périodiques à amplitude constante, le problème du comptage disparaît puisqu'une période, c'est à dire un seul cycle, suffit à estimer la durée de vie. De plus la problématique du choix du plan de comptage n'a plus lieu d'être pour un tel cas de figure, car l'aspect cyclique de la sollicitation transparait de façon identique sur tous les plans (à l'exception de quelques plans particuliers où la contrainte normale peut rester constante).

Il apparaît donc nécessaire d'analyser l'influence du plan de comptage sur les résultats, d'en dégager des tendances ou des observations à caractère général et de trouver une méthodologie afin de pallier à cette difficulté. L'objectif est d'être capable de donner une estimation de la durée de vie qui soit indépendante du choix du plan de comptage, ceci dans

le cas le plus général de chargement, c'est à dire dans le cadre de la fatigue multiaxiale aléatoire.

III.2.3.2 Mise en évidence de l'influence du plan de comptage

Nous avons, pour des chargements biaxiaux aléatoires, modifié l'orientation de la normale h_0 au plan de comptage. Les séquences que nous avons utilisées sont biaxiales aléatoires et permettent, pour des raisons de contraintes planes et de symétrie (absence de cisaillement $\sigma_{xy}(t)$), d'étudier l'influence du plan de comptage en faisant varier uniquement l'angle φ_0 de 0° à 90° (pour ces séquences il n'y a pas d'influence de l'angle γ_0). Il s'agit des séquences GP9310 et GP9313 déjà rencontrées et fournies par le laboratoire polonais du Professeur Macha. La méthode générale a donc été appliquée à ces deux séquences. Les méthodologies de calculs étudiées sont au nombre de trois, il s'agit de l'utilisation :

- du critère de Robert,
- de celui de Fogue,
- du principe du dommage par plan utilisant le critère de Robert, c'est à dire le calcul et le cumul du dommage plan par plan comme évoqué au paragraphe III.2.2.2.

Les résultats obtenus sont présentés sur les figures III.32 et III.33. Ces deux graphiques donnent les estimations de durées de vie pour chacune des séquences en fonction de l'angle φ_0 , c'est à dire en fonction de l'angle repérant le plan de comptage (γ_0 a été pris égal à 90° , mais des résultats identiques auraient été obtenus avec une valeur différente excepté 0° ou 180°). La loi d'endommagement utilisée ici est celle de Miner. Les calculs ont été réalisés avec un pas de variation de l'angle φ_0 de 5° . Les durées de vie sont dans les deux cas exprimées en nombre de répétitions de la séquence.

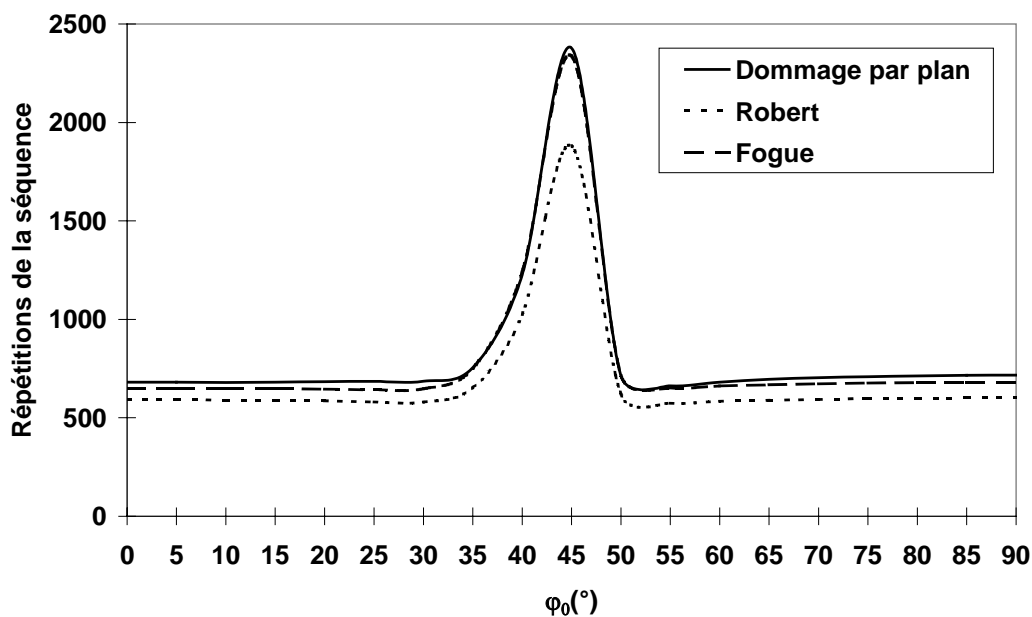


Figure III.32. Durées de vie obtenues avec la séquence GP9310 en fonction de l'orientation de la normale au plan de comptage.

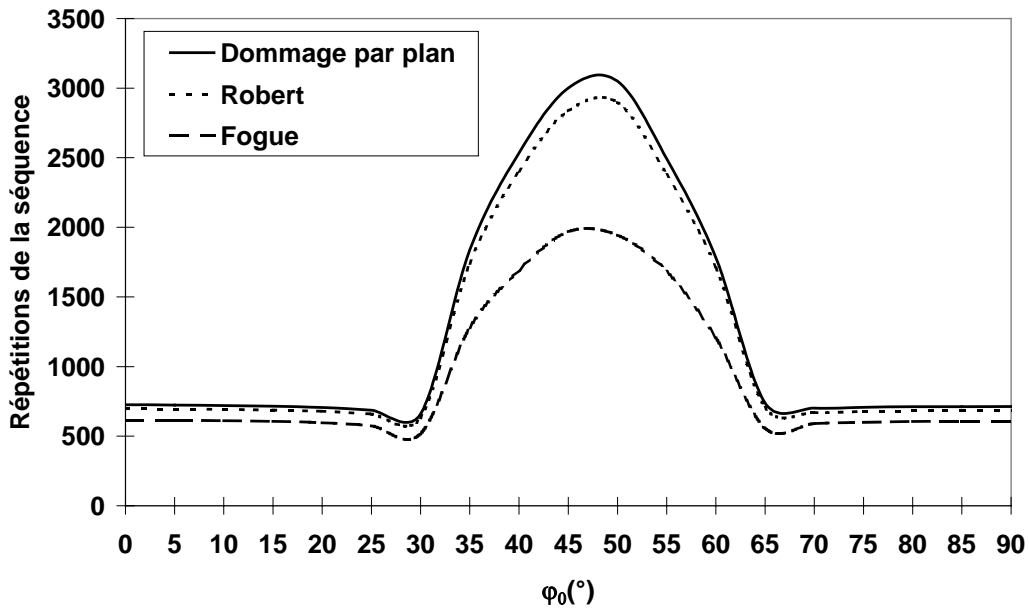


Figure III.33. Durées de vie obtenues avec la séquence GP9313 en fonction de l'orientation de la normale au plan de comptage.

La dernière séquence biaxiale, construite à l'aide d'un générateur de fonction aléatoire (séquence fournie par EDF), nous a permis aussi d'étudier l'influence du plan de comptage. Les niveaux de contraintes maximums atteints durant cette séquence sont volontairement du même ordre de grandeur que ceux rencontrés pour les séquences de Macha. Ainsi nous pouvons conserver les données de fatigue du matériau bien que cette séquence n'ait pas fait l'objet d'une application expérimentale. Ce signal fortement aléatoire construit par EDF permet d'étudier cette influence du plan de comptage à partir lui aussi de la seule variation de l'angle φ_0 entre 0° et 180° (non influence de l'angle γ_0 pour des raisons de contraintes planes). La figure III.34 suivante donne l'évolution des durées de vie obtenues à l'aide des trois méthodologies de calcul utilisées (critère de Robert, critère de Fogue et principe du dommage par plan) en fonction de l'angle φ_0 , c'est à dire plus simplement en fonction de l'orientation de la normale au plan de comptage.

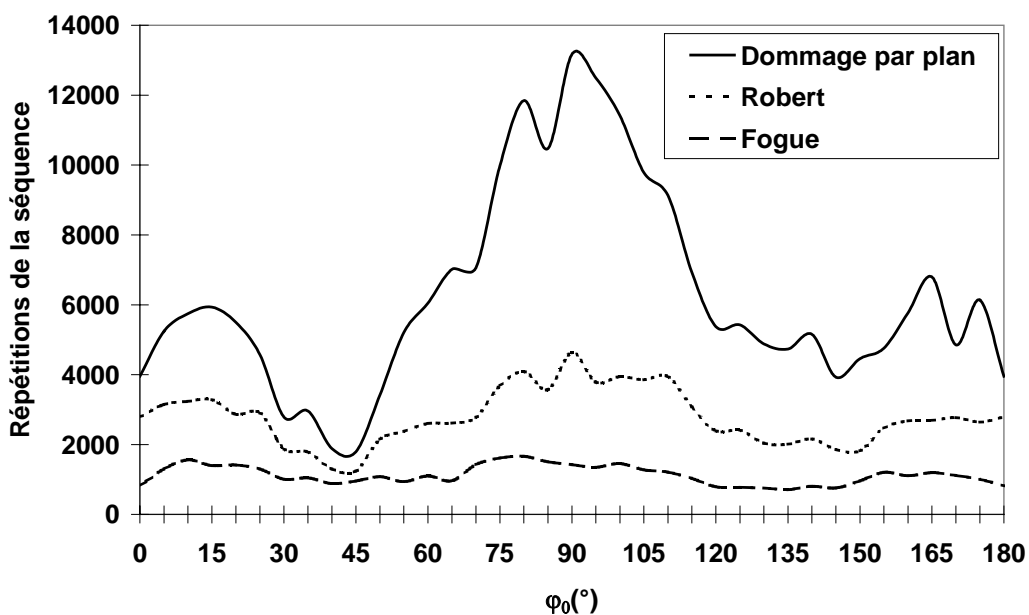


Figure III.34. Durées de vie obtenues pour la séquence EDF en fonction de l'orientation de la normale au plan de comptage.

Les trois figures (III.32, III.33 et III.34) montrent clairement une dépendance très forte entre le calcul de durée de vie et le choix du plan de comptage. Suivant la méthode utilisée, des singularités peuvent apparaître mais d'une manière générale de grandes disparités sont constatées entre les durées de vie obtenues pour des plans de comptage différents. Les rapports des durées de vie maximales sur les durées de vie minimales peuvent être établis pour chacune des méthodes et chaque séquence, matérialisant aussi les écarts observés en fonction du plan de comptage. Les tableaux III.9, III.10 et III.11 ci-dessous présentent les rapports obtenus pour chaque séquence :

Séquence GP9310	Robert	Fogue	Domage par plan
Rapports $\frac{N_{max}}{N_{min}}$	3,27	3,59	3,58

Tableau III.9. Rapports $\frac{N_{max}}{N_{min}}$ pour la séquence GP9310.

Séquence GP9313	Robert	Fogue	Domage par plan
Rapports $\frac{N_{max}}{N_{min}}$	4,57	3,80	4,62

Tableau III.10. Rapports $\frac{N_{max}}{N_{min}}$ pour la séquence GP9313.

Séquence EDF	Robert	Fogue	Domage par plan
Rapports $\frac{N_{max}}{N_{min}}$	3,73	2,04	7,33

Tableau III.11. Rapports $\frac{N_{max}}{N_{min}}$ pour la séquence EDF.

Le rapport $\frac{N_{max}}{N_{min}}$ est en moyenne de l'ordre de 3.48 pour la première séquence de Macha (GP9310), de 4.33 pour la seconde (GP9313) et de 4.37 pour la séquence EDF, fortement aléatoire. On obtient un rapport global moyen voisin de 4 sur l'ensemble des séquences entre les prévisions les moins conservatives et les plus conservatives de durée de vie. Ce rapport 4 vient logiquement se multiplier, en pratique, aux rapports déjà obtenus entre les résultats expérimentaux et les durées de vie estimées par la méthode.

Il apparaît donc nécessaire de définir une méthodologie qui assure un choix correct du plan sur lequel s'effectue le comptage. Seul un critère de fatigue multiaxial de type plan critique basé sur le principe du calcul et du cumul du dommage plan par plan permet d'associer à une direction un dommage donc une durée de vie. Contrairement à la méthode classique utilisant un critère multiaxial de fatigue qui, au point où l'étude est menée, attribue un dommage dans sa globalité à la matière, le principe du dommage par plan considère un point et un ensemble de facettes passant par ce point de façon à tenir compte de la répartition du dommage en fonction de l'orientation de ces facettes. Chaque plan (ou direction) subit à sa manière les sollicitations appliquées en fonction de son orientation. Chaque facette subit donc un dommage qui lui est propre, uniquement fonction des contraintes réellement appliquées sur cette facette et indépendant de ce qui est appliqué à toute autre facette qui peut être plus ou moins sollicitée qu'elle.

III.2.3.3 Comment choisir le plan de comptage adéquat ? Méthode du comptage et dommage par plan

Une première idée a consisté à utiliser les résultats donnés par le principe du dommage par plan afin d'établir une règle pour choisir le plan de comptage qui aboutit au résultat le plus conservatif de façon à toujours se placer en sécurité vis à vis de la méthode d'estimation de durée de vie. Etant donné que chaque calcul mettant en œuvre le dommage par plan fournit une distribution du dommage et donc un plan critique, nous proposons la démarche suivante. Nous effectuons une première estimation de la durée de vie et obtenons ainsi un plan critique. Nous choisissons ensuite ce plan critique comme nouveau plan de comptage car il semble logique de prendre en compte ce qui se passe en réalité sur le plan critique, notamment pour le comptage des cycles, puisqu'il s'agit du plan déterminant en ce qui concerne la tenue en fatigue du matériau. Si le nouveau plan de comptage ne coïncide pas avec le nouveau plan critique issu du deuxième calcul, nous reprenons ce dernier comme plan de comptage lors d'une nouvelle estimation. Nous espérons ainsi converger vers un plan critique fixe identique au plan de comptage. Si ce processus fonctionne il fournit un plan de comptage correct dans le sens où il procure la durée de vie la plus conservative au sens de la méthode. Nous avons testé ce principe sur la séquence biaxiale aléatoire d'EDF. Le tableau III.12 ci-dessous résume les étapes successives du calcul :

Séquence EDF	1 ^{ère} estimation		2 ^{ème} estimation		3 ^{ème} estimation		4 ^{ème} estimation	
	φ	γ	φ	γ	φ	γ	φ	γ
Plan de comptage	$\frac{\pi}{\sqrt{7}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{19}}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
Plan critique	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
Durée de vie (nbre de séquences)	6330		11847		2788		3956	

Tableau III.12. Convergence des plans critique et de comptage pour la séquence EDF.

Pour la séquence GP9310 de Macha, nous obtenons un plan de comptage confondu avec le plan critique après deux itérations (voir tableau III.13 ci-dessous). La durée de vie pour ces plans communs est de 682 répétitions de séquence. Cependant différentes simulations effectuées nous ont montré que le résultat le plus conservatif, soit 663 répétitions, était obtenu sur le plan critique défini par $\varphi = \frac{\pi}{3}$ et $\gamma = \frac{\pi}{2}$ avec le plan de

comptage $\varphi = \frac{11}{36}\pi$ et $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Séquence GP9310	1 ^{ère} estimation		2 ^{ème} estimation	
	φ	γ	φ	γ
Plan de comptage	$\frac{\pi}{\sqrt{7}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{19}}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Plan critique	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Durée de vie (nombre de séquences)	701		682	

Tableau III.13. Convergence des plans critique et de comptage pour la séquence GP9310.

Pour la séquence GP9313, le plan commun $\varphi = \frac{\pi}{6}$ et $\gamma = \frac{\pi}{2}$ est lui aussi obtenu après deux itérations de calcul de durée de vie (voir tableau III.14 ci-dessous). Il conduit à la durée de vie la plus conservative (661 répétitions de la séquence). Aucun autre plan parmi ceux scrutés ne fournit de valeur plus faible donc de prévision plus conservative de la durée de vie.

Séquence GP9313	1 ^{ère} estimation		2 ^{ème} estimation	
	φ	γ	φ	γ
Plan de comptage	$\frac{\pi}{\sqrt{7}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{19}}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
Plan critique	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
Durée de vie (nombre de séquences)	702		661	

Tableau III.14. Convergence des plans critique et de comptage pour la séquence GP9313.

L'idée développée ici nous fournit un procédé de recherche du plan de comptage qui est le mieux adapté au principe du dommage par plan. A l'heure actuelle, nous n'avons pas rencontré de séquence pour laquelle ce processus ne converge pas, c'est à dire qui ne permette pas de trouver un plan critique et un plan de comptage communs. Néanmoins cette convergence n'est pas suffisante puisque la séquence GP9310 met en défaut ce procédé : il ne nous procure pas pour cette séquence le plan le plus conservatif. Il est donc nécessaire d'étudier un autre moyen pour trouver le plan de comptage adéquat.

Tout en conservant le principe du dommage par plan, et afin de dégager une autre méthodologie pour choisir le plan de comptage, nous proposons une seconde démarche. L'idée n'est plus seulement de calculer et de cumuler le dommage plan par plan pour chaque cycle extrait de la séquence grâce à la variable de comptage, mais d'effectuer aussi le comptage plan par plan. En effet chaque plan subit une contrainte normale différente de celle agissant sur un plan voisin de par la différence d'orientation des facettes. La séquence de chargement est par conséquent vécue au sens physique différemment d'une facette à l'autre. En effectuant un comptage plan par plan, c'est à dire en procédant à l'identification et à l'extraction des cycles multiaxiaux de contraintes sur chaque facette explorée, puis à un calcul et un cumul du dommage facette par facette, on est alors capable, par lissage, de visualiser la distribution du dommage et des durées de vie de tous les plans passant par le point d'étude (point où est connue la séquence multiaxiale aléatoire en contrainte). De fait chaque facette sert à la fois de plan de comptage et de plan de calcul et de cumul du dommage. La méthodologie est alors très simple et elle consiste à choisir le plan le plus endommagé parmi tous les plans comme plan critique. Ce nouveau principe permet de déterminer l'orientation du plan qui conduit à l'estimation de la durée de vie la plus conservative possible, donc la plus sécurisante. La figure III.35 présente l'algorithme de cette nouvelle méthode (comptage et dommage plan par plan).

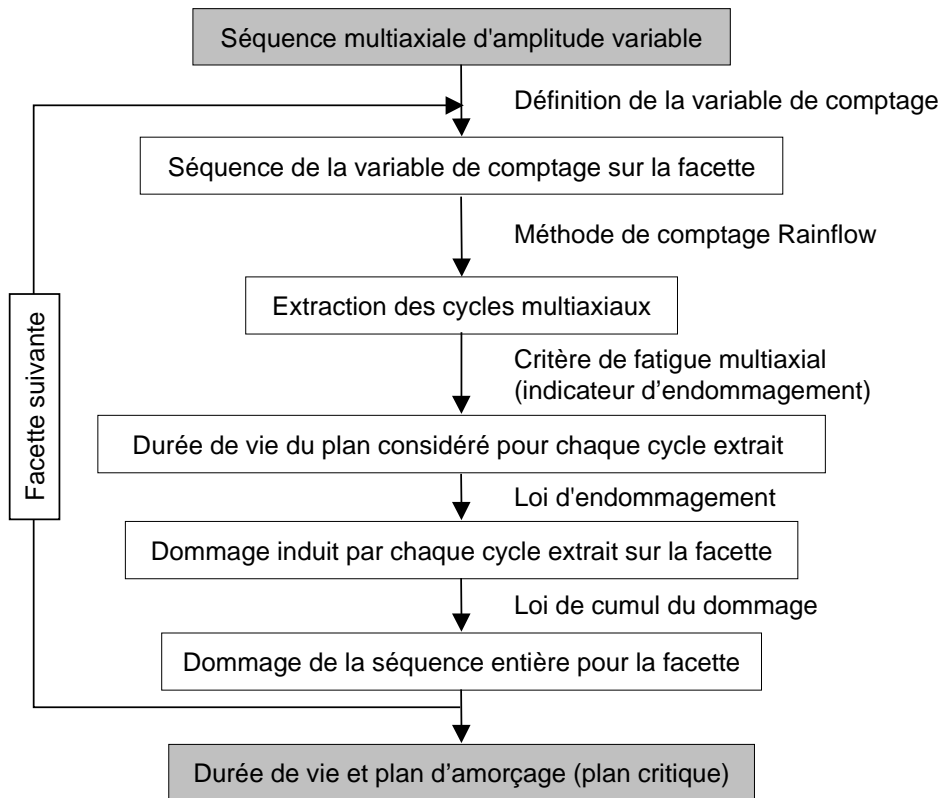


Figure III.35. Synoptique du principe du comptage et dommage plan par plan.

Cette procédure, un peu plus coûteuse en terme de temps de calcul, garantit un choix correct du plan de comptage car son choix n'est plus arbitraire. De plus elle donne un fondement plus physique au concept du dommage par plan en ajoutant le comptage sur le même plan. Cette démarche permet ainsi de s'affranchir du problème de l'influence du plan de comptage sur les durées de vie, influence très forte comme on a pu le voir précédemment, puisque le comptage est effectué sur tous les plans. La méthode apparaît également plus conforme à la réalité physique. La notion de cycle étant définie par la contrainte normale s'exerçant sur une facette, le découpage de la séquence multiaxiale en cycles n'a de sens et n'est légitime en toute rigueur que par rapport à ce plan. Et grâce à la procédure proposée, il n'est plus utilisé que pour le plan considéré.

Pratiquement, après la discrétisation de la demi-sphère en facettes d'aires équivalentes, nous passons en revue chaque facette. Sur chacune d'elles, nous utilisons la contrainte normale qui lui est propre comme variable de comptage pour construire la séquence de la variable de comptage et lui appliquer le comptage Rainflow afin d'identifier et d'extraire les cycles multiaxiaux. Puis nous appliquons l'indicateur d'endommagement du critère de Robert de manière à déterminer la durée de vie des cycles extraits en résolvant l'équation $E_h = 1$ sur la facette considérée. Le dommage est alors calculé et cumulé sur celle-ci afin de déterminer sa durée de vie pour la séquence toute entière. Cette opération est répétée sur l'ensemble des facettes explorées. La durée de vie du matériau au point où est faite l'étude est celle du plan critique, c'est à dire celle du plan le plus endommagé par l'ensemble de la séquence.

Nous avons aussi appliqué le principe du comptage et dommage par plan aux dix séquences biaxiales aléatoires de Macha. Afin de comparer les résultats obtenus maintenant à ceux des versions antérieures nous présentons ceux donnés par la méthode classique, ceux issus du principe du dommage par plan et enfin ceux déterminés par le principe du comptage et dommage par plan. Pour les deux premières méthodes le plan de comptage est celui défini initialement par $\varphi_0 = \pi/\sqrt{7}$ et $\gamma_0 = \pi/\sqrt{19}$. Les tableaux III.15 et III.16

rassemblent l'ensemble des résultats obtenus pour les séquences de Macha. Les calculs ont été conduits en utilisant la loi d'endommagement de Miner ou celle de Lemaitre et Chaboche (avec les coefficients $\beta = 4.5093$ et $aM_0^{-\beta} = 2.7135 \times 10^{-17}$).

Pour la loi de Miner :

Séquence	Durée de vie expérimentale	Durée de vie Méthode classique		Durée de vie Dommage par plan		Durée de vie Comptage et dommage par plan	
	Nbre $N_{exp.}$ de répétitions	Nbre $N_{num.}$ de répétitions	Rapport $N_{exp.}/N_{num.}$	Nbre $N_{num.}$ de répétitions	Rapport $N_{exp.}/N_{num.}$	Nbre $N_{num.}$ de répétitions	Rapport $N_{exp.}/N_{num.}$
GP9302	3273	5141	0.6366	6515	0.5024	8567	0.3820
GP9305	287	188	1.5266	206	1.3932	208	1.3798
GP9307	398	652	0.6104	710	0.5605	695	0.5727
GP9308	875	504	1.7361	522	1.6762	532	1.6447
GP9310	1301	593	2.1939	701	1.8559	682	1.9076
GP9312	2468	971	2.5417	1131	2.1821	1152	2.1424
GP9313	1664	671	2.4799	702	2.3704	661	2.5174
GP9314	848	322	2.6335	357	2.3753	357	2.3754
GP9315	267	28	9.5357	29	9.2069	29	9.2069
GP9619	342	308	1.1104	354	0.9661	295	1.1593
	Moyenne des rapports		2.5005		2.3089		2.3288

Tableau III.15. Comparatif des durées de vie calculées par les trois méthodes (loi de Miner).

Pour la loi de Lemaitre et Chaboche :

Séquence	Durée de vie expérimentale	Durée de vie Méthode classique		Durée de vie Dommage par plan		Durée de vie Comptage et dommage par plan	
	Nbre $N_{exp.}$ de répétitions	Nbre $N_{num.}$ de répétitions	Rapport $N_{exp.}/N_{num.}$	Nbre $N_{num.}$ de répétitions	Rapport $N_{exp.}/N_{num.}$	Nbre $N_{num.}$ de répétitions	Rapport $N_{exp.}/N_{num.}$
GP9302	3273	649	5.0431	743	4.4051	7790	0.4202
GP9305	287	129	2.2248	141	2.0355	142	2.0211
GP9307	398	416	0.9567	554	0.7184	434	0.9171
GP9308	875	368	2.3777	387	2.2610	392	2.2321
GP9310	1301	389	3.3445	456	2.8531	453	2.8720
GP9312	2468	609	4.0525	724	3.4088	656	3.7622
GP9313	1664	547	3.0420	600	2.7733	568	2.9296
GP9314	848	238	3.5630	269	3.1524	261	3.2490
GP9315	267	18	14.8333	19	14.0526	17	15.7059
GP9619	342	166	2.0602	190	1.8000	165	2.0727
	Moyenne des rapports		4.1498		3.7460		3.6182

Tableau III.16. Comparatif des durées de vie calculées par les trois méthodes (loi de Lemaitre et Chaboche).

On observe des résultats très voisins en terme de durées de vie hormis pour la séquence GP9302. Lorsque la loi de Miner est utilisée, le principe du comptage et dommage par plan nous donne un rapport moyen entre l'expérience et l'estimation de 2.3288, ce qui est légèrement supérieur à celui obtenu avec le principe du dommage par plan (2.3089). On note cependant une amélioration de ce rapport lorsque la loi de Lemaitre et Chaboche est employée puisque celui-ci passe de 3.7460 (dommage par plan) à 3.6182 (comptage et dommage par plan). Les résultats de ces estimations sont présentés graphiquement sur les figures ci-dessous avec la loi d'endommagement linéaire de Miner (figure III.36) et celle non linéaire de Lemaitre et Chaboche (figure III.37).

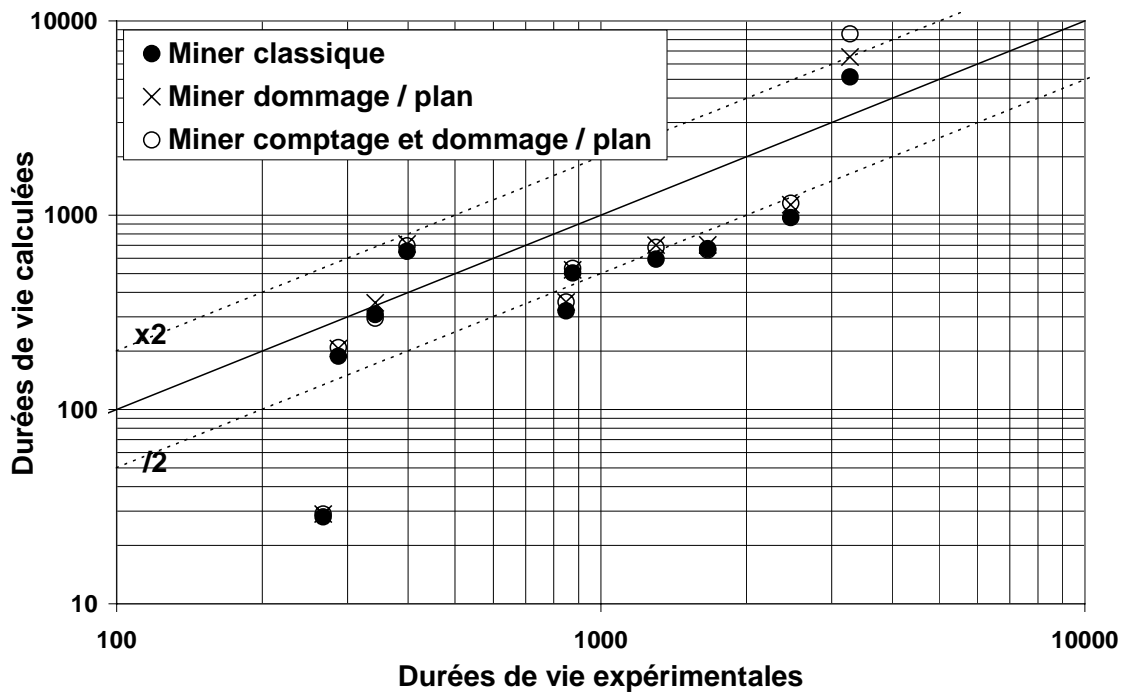


Figure III.36. Comparaison des résultats (séquences de Macha) pour la loi de Miner.

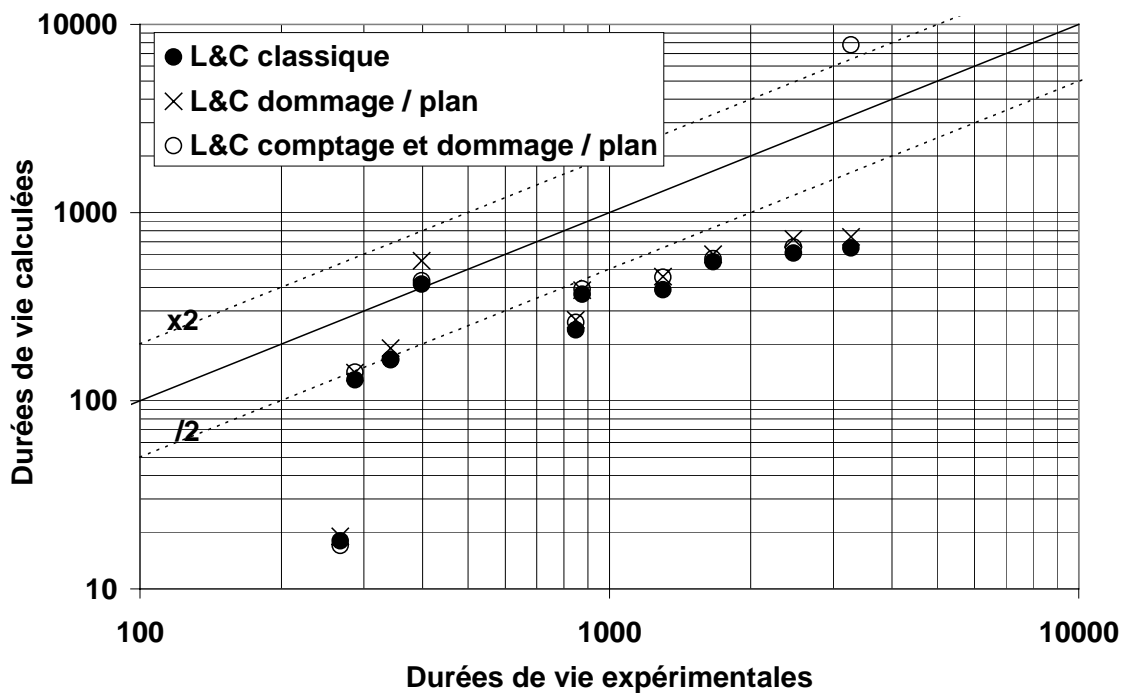


Figure III.37. Comparaison des résultats (séquences de Macha) pour la loi de Lemaitre et Chaboche.

La méthode du comptage et dommage par plan, comme celle du dommage par plan, permet de visualiser la distribution du dommage en fonction de l'orientation du plan considéré. Les figures III.38, III.39 et III.40 présentent les distributions du dommage avec la loi de Miner pour les séquences GP9310, GP9313 et la séquence biaxiale fournie par EDF respectivement.

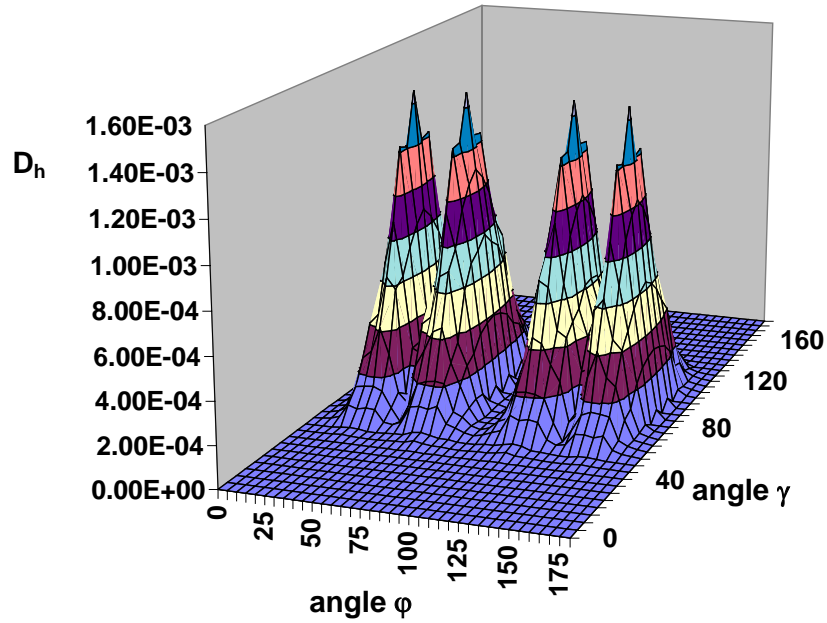


Figure III.38. Distribution du dommage par la méthode du comptage et dommage par plan. Séquence GP9310. Loi de Miner.

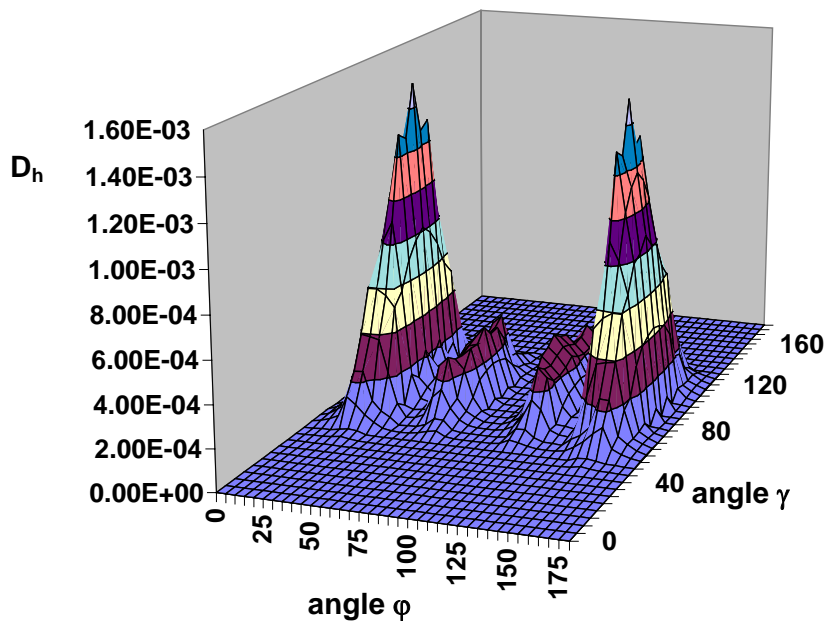


Figure III.39. Distribution du dommage par la méthode du comptage et dommage par plan. Séquence GP9313. Loi de Miner.

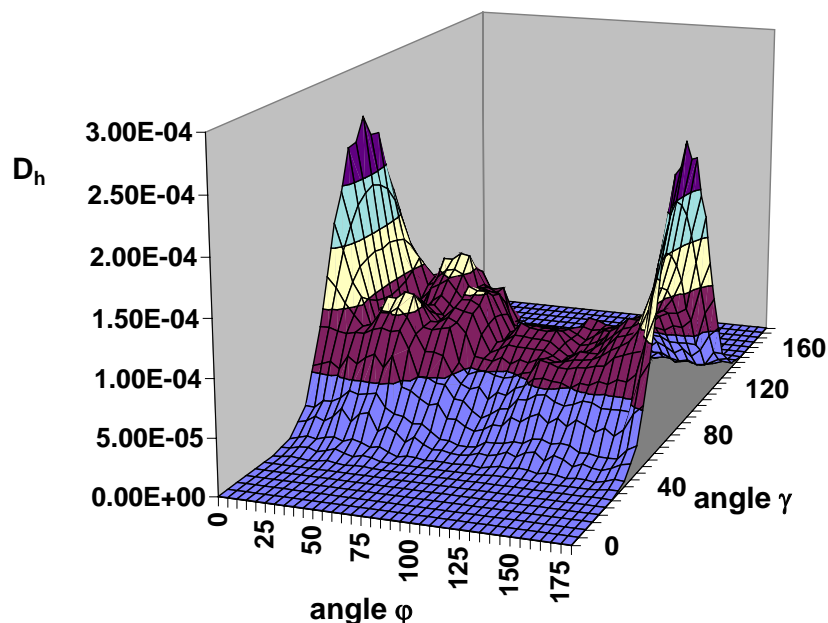


Figure III.40. Distribution du dommage par la méthode du comptage et dommage par plan. Séquence biaxiale EDF. Loi de Miner.

Pour ces trois séquences, la méthode du comptage et dommage par plan permet d'identifier très clairement les plans les plus endommagés du matériau et susceptibles de voir se développer l'amorçage d'une fissure. L'état de contraintes planes, présent pour les trois séquences, induit la symétrie de la distribution par rapport au plan $\gamma = 90^\circ$.

III.2.4 Conclusions

Nous avons tout d'abord rappelé la démarche classique employée dans la méthode initiale d'estimation de durée de vie pour des chargements multiaxiaux aléatoires, ce qui a conduit à exposer le problème du comptage des cycles multiaxiaux (leur identification puis leur extraction), à présenter l'utilité des critères de fatigue qui permettent de calculer la durée de vie des cycles multiaxiaux extraits de la séquence de chargement et à donner les lois d'endommagement utilisées pour calculer et cumuler le dommage qui mène à la durée de vie du matériau pour la séquence entière.

Nous avons ensuite exposé et justifié le principe du dommage par plan, premier axe de cette étude. L'observation des distributions de l'indicateur d'endommagement, pour plusieurs cycles multiaxiaux différents, montre que les plans ne sont pas sollicités pareillement dans chaque cas. L'objectif était donc de proposer une nouvelle méthode qui ne considère plus le dommage de façon globale, mais qui le calcule et le cumule plan par plan. En se plaçant à l'échelle d'un plan, nous avons utilisé l'indicateur d'endommagement E_n du critère de Robert pour calculer la durée de vie du plan matériel pour chaque cycle extrait. Il s'agit simplement de résoudre sur le plan considéré l'équation implicite en N (N étant la durée de vie) $E_n = 1$ pour chaque cycle multiaxial tiré de la séquence de chargement aléatoire.

Le dommage est ainsi établi plan par plan. Cette proposition est en accord à la fois avec le critère employé (détermination du plan critique) et avec le sens physique que nous attribuons au dommage par plan (dommage évalué sur un plan en fonction des sollicitations réelles appliquées à ce plan). Bien qu'un peu plus coûteuse en temps de calcul, la méthode mise en œuvre est tout à fait acceptable.

Le principe du dommage par plan utilise donc l'indicateur d'endommagement d'un critère de type plan critique où apparaissent les constantes de calage du critère, lesquelles sont déterminées à partir de sollicitations simples (traction alternée symétrique, traction répétée et torsion alternée symétrique) comme pour l'utilisation habituelle du critère multiaxial de fatigue. Le critère d'approche global de Fogue ne peut être utilisé tel quel dans le cadre de l'approche du dommage par plan car sa fonction de fatigue procède par l'intégration de son indicateur d'endommagement E_n sur tous les plans possibles. La valeur de E_n pour un plan donné n'est pas interprétable pour ce qui est de la durée de vie, seule l'est la fonction de fatigue. Il pourrait être utilisé cependant un indicateur d'endommagement exploitant les mêmes paramètres des contraintes que celui du critère de Fogue (amplitude des contraintes normale et tangentielle σ_{hha} et τ_{ha} , contrainte normale moyenne σ_{hhm}) et basé sur un concept de plan critique, mais il s'agirait dans ce cas là d'un nouveau critère, dont les constantes de calage sont différentes de celles du critère de Fogue. Kenmeugne a montré dans sa thèse que ce critère est moins performant que celui de Fogue.

Nous avons donc développé cette approche en y ajoutant la possibilité de discrétiser plus ou moins finement la sphère de rayon unité par des facettes d'aires équivalentes. Nous avons repris les données expérimentales connues sur les éprouvettes cruciformes du Professeur Macha afin de valider la méthode ainsi établie. Les résultats des estimations utilisant le principe du dommage par plan sont comparés à ceux obtenus par la méthode classique et aux résultats expérimentaux. Que ce soit avec la loi d'endommagement de Miner ou avec celle de Lemaitre et Chaboche, les rapports entre les durées de vie expérimentales et celles calculées ont été rapprochés de la valeur unité par rapport à ce qui était établi avec la méthode classique, ce qui indique une amélioration des estimations en moyenne, lorsque le principe du dommage par plan est employé.

Le deuxième axe de cette étude concernait l'influence du plan de comptage. La méthode d'estimation de durée de vie en fatigue multiaxiale aléatoire développée à l'INSA repose sur l'utilisation d'une variable de comptage afin d'identifier puis d'extraire les cycles multiaxiaux de la séquence de chargement multiaxiale aléatoire. La variable retenue pour réaliser l'identification et l'extraction des cycles de contraintes est la contrainte normale agissant sur un plan physique fixé. Ce choix a été retenu au regard du comportement d'autres variables, les invariants des contraintes, qui elles ne conviennent pas. Selon l'orientation du plan de comptage, l'estimation de la durée de vie du matériau varie énormément. Elle est donc dépendante du plan physique choisi comme plan de comptage. Nous l'avons constaté au travers des deux distributions du dommage par plan obtenues avec deux plans de comptage distincts, et ceci pour plusieurs séquences différentes (deux séquences de Macha et une séquence fortement aléatoire fournie par EDF). La particularité de ces séquences – état de contraintes planes – conduit à des estimations ne dépendant que d'un angle parmi les deux nécessaires pour définir la normale à un plan. Cela simplifie mais ne réduit pas la portée de cette étude. Les méthodes de prévision employées sont la méthode classique avec les critères de Robert ou de Fogue et la méthode du dommage par plan. La loi d'endommagement linéaire de Miner est utilisée afin de minimiser les temps de calcul étant donné le nombre important de simulations à réaliser. Les variations de durée de vie obtenues par les trois méthodes montrent sans ambiguïté qu'il est important de maîtriser le choix du plan de comptage : en effet les rapports entre les durées de vie maximales et minimales varient dans un intervalle allant de 2.04 à 7.33.

Le choix idéal d'un plan de comptage consiste à trouver celui qui procure la prévision la plus conservative, c'est à dire la durée de vie minimale, et ceci au moyen d'une méthodologie sans faille. Dans le cadre du principe du dommage par plan, la durée de vie estimée sur une facette, pour un cycle multiaxial donné, dépend à la fois de l'orientation de cette facette et de celle du plan de comptage car c'est de lui que dépend la détection du cycle. Le cycle de contraintes identifié par la variable de comptage (contrainte normale) est réellement vécu comme tel par le plan de comptage. Il était censé jusqu'à présent apparaître

aussi comme un cycle sur les autres plans sans que cela soit en réalité forcément le cas. Cette observation nous a conduits vers une nouvelle approche qui permet de s'affranchir du choix du plan de comptage. Il s'agit de réaliser un comptage des cycles plan par plan. De manière analogue à la méthode du dommage par plan, nous réalisons cette fois-ci le comptage, le calcul et le cumul du dommage facette par facette. Ainsi chaque plan s'endommage au rythme des cycles que lui applique sa contrainte normale. Les durées de vie obtenues sont alors indépendantes d'un choix arbitraire de plan de comptage. Cette nouvelle approche permet de résoudre définitivement le problème de l'influence du plan de comptage et renforce le sens physique du dommage par plan. Cette nouvelle méthode est alors testée sur les séquences biaxiales aléatoires de Macha. Les rapports des durées de vie expérimentales sur les durées de vie estimées sont comparés à ceux de la méthode classique et ceux du dommage par plan pour les deux lois d'endommagement déjà utilisées. On observe des résultats voisins entre la nouvelle méthode, de comptage et dommage par plan, et celle de dommage par plan étudiée dans la première partie.

Partis de la méthode classique, nous avons donc abouti au principe du comptage et dommage par plan. En se plaçant à l'échelle d'une facette, nous avons vu que seul un critère de type plan critique permettait de calculer et de cumuler le dommage plan par plan. Nous avons ajouté au principe du dommage par plan celui du comptage sur le même plan. Chaque facette subit la séquence de chargement en fonction de sa propre orientation. Les cycles de contraintes auxquels elle est soumise sont ceux qui agissent sur elle et ne correspondent pas forcément à ceux identifiés sur un autre plan de comptage comme cela était sous-entendu de fait dans le cas du dommage par plan. Se placer à l'échelle des plans passant par le point d'étude nous achemine vers une analyse systématique de type plan critique puisque l'estimation de la durée de vie du matériau est obtenue à l'aide du plan le plus endommagé. Cette démarche peut être mise en œuvre avec d'autres critères de fatigue de type plan critique que celui de Robert, à la condition qu'ils utilisent la notion d'indicateur d'endommagement par plan. Les critères de Findley, de Yokobori et de Dang Van 1 peuvent donc tous être intégrés désormais à la démarche générale de calcul de durée de vie en fatigue multiaxiale aléatoire basée sur le comptage et dommage par plan. De plus, cette méthode permet d'obtenir à la fois une estimation de la durée de vie et une information sur l'orientation du plan critique qui lui est associé, comme en atteste la visualisation de la distribution du dommage autour du point d'étude. Il est alors aisé de déterminer l'orientation du plan d'amorçage de fissure, information qui n'existe pas lorsqu'on utilise la méthode classique [107,108]

III.3 Développement d'un logiciel industriel d'estimation de durée de vie en fatigue sous chargement quelconque

L'ensemble des études réalisées en fatigue multiaxiale aléatoire l'ont toutes été dans le but de développer un logiciel à caractère industriel. Celui-ci doit donc permettre de calculer en fatigue des structures complexes soumises à des chargements variés incluant tout type de sollicitations uniaxiales, multiaxiales, périodiques ou aléatoires. Trois démarches sont désormais disponibles pour l'estimation de la durée de vie en fatigue :

- **La méthode classique** basée sur la définition d'une variable de comptage (contrainte normale agissant sur un plan physique donné) qui permet d'identifier puis d'extraire des cycles multiaxiaux de contrainte, sur l'utilisation d'un critère de fatigue servant à estimer la durée de vie du matériau soumis à chaque cycle de contrainte, et sur les lois d'endommagement telles que celles de Miner et de Lemaitre et Chaboche. Celles-ci permettent de calculer et de cumuler le dommage induit par les différents cycles pour finalement prévoir la durée de vie exprimée en nombre de répétitions de la séquence de chargement.