

## Annexe C : Calage des critères de Robert et de Fogue à intégration du gradient de contrainte

### C.1 Nomenclature

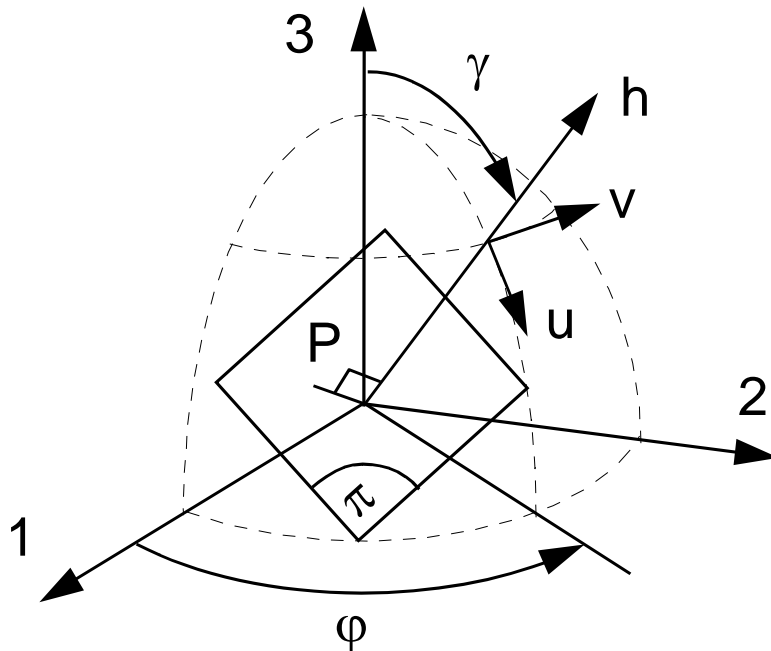
Les essais sont décrits par l'évolution en fonctions sinusoïdales du tenseur  $[\sigma_{ij}(t)]$ . Les composantes  $\sigma_{ij}(t)$  de la matrice des contraintes sont définies par :

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ijm} + \sigma_{ija}(t) \quad (C.1)$$

où  $\sigma_{ija}(t) = \sigma_{ija} \sin(\omega t - \theta_{ij})$  est la partie alternée,  $\sigma_{ijm}$  la partie moyenne,  $\sigma_{ija}$  l'amplitude et  $\theta_{ij}$  le déphasage de la composante  $\sigma_{ij}(t)$ .

Un plan physique  $\pi$  passant par le point d'étude P est définie par sa normale h. Le repère (u, v, h) lié au plan est défini dans le repère global (1, 2, 3) par :

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_1 = -\sin \varphi \\ u_2 = \cos \varphi \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{v} = \begin{cases} v_1 = -\cos \gamma \cos \varphi \\ v_2 = -\cos \gamma \sin \varphi \\ v_3 = \sin \gamma \end{cases} \quad \mathbf{h} = \begin{cases} h_1 = \sin \gamma \cos \varphi \\ h_2 = \sin \gamma \sin \varphi \\ h_3 = \cos \gamma \end{cases} \quad (C.2)$$



**Figure C.1.** Orientation d'un plan matériel  $\pi$  de normale h passant par le point P dans le repère global (1, 2, 3) ; repère (u, v, h) lié au plan  $\pi$ .

Ainsi la contrainte normale au plan est définie à l'instant t par :

$$\sigma_{hh}(t) = h_i \sigma_{ij}(t) h_j = h_i h_j \sigma_{ij}(t) \quad (C.3)$$

D'où :

$$\sigma_{hh}(t) = h_i h_j \sigma_{ijm} + h_i h_j \sigma_{ija} \sin(\omega t - \theta_{ij}) \quad (C.4)$$

Soit :

$$\sigma_{hh}(t) = h_i h_j \sigma_{ijm} + h_i h_j \sigma_{ija} (\sin \omega t \cdot \cos \theta_{ij} - \cos \omega t \cdot \sin \theta_{ij}) \quad (C.5)$$

La contrainte normale peut également s'écrire  $\sigma_{hh}(t) = \sigma_{hhm} + \sigma_{hha}(t)$   
 où  $\sigma_{hha}(t)$  est la contrainte normale alternée :  $\sigma_{hha}(t) = h_i h_j \sigma_{ija} \sin(\omega t - \theta_{ij})$ .

Pour sa part, la contrainte tangentielle  $\tau_h(t)$  existant sur le plan physique se décompose en deux contraintes portées par les axes u et v formant une base dans le plan de normale h. Les composantes sont définies par :

$$\sigma_{uh}(t) = u_i h_j \sigma_{ij}(t) = \sigma_{ijm} u_i h_j + \sigma_{ija} u_i h_j (\sin \omega t \cdot \cos \theta_{ij} - \cos \omega t \cdot \sin \theta_{ij}) \quad (C.6)$$

$$\sigma_{vh}(t) = v_i h_j \sigma_{ij}(t) = \sigma_{ijm} v_i h_j + \sigma_{ija} v_i h_j (\sin \omega t \cdot \cos \theta_{ij} - \cos \omega t \cdot \sin \theta_{ij}) \quad (C.7)$$

## C.2 Calage du critère de Robert intégrant le gradient de contrainte

### C.2.1. Calage en traction-compression

En traction-compression uniaxiale, suivant l'axe 1 par exemple, la contrainte normale au plan de normale h (figure C.1) est définie par :

$$\sigma_{hh}(t) = \sigma_{hhm} + \sigma_{hha} \sin \omega t \quad (C.8)$$

avec :

$$\sigma_{hh}(t) = \sigma_{11m} h_1 h_1 + \sigma_{11a} h_1 h_1 \sin \omega t \quad (C.9)$$

Soit :

$$\begin{cases} \sigma_{hhm} = \sigma_{11m} h_1^2 \\ \sigma_{hha}(t) = \sigma_{11a} h_1^2 \sin \omega t \\ \sigma_{hh}(t) = \sigma_{11m} h_1^2 + \sigma_{11a} h_1^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (C.10)$$

La contrainte tangentielle dans le plan est donnée par :

$$\bar{\tau}_h(t) = \bar{\tau}_{hm} + \bar{\tau}_{ha}(t) \quad (C.11)$$

avec :

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{hm} = |\sigma_{11m}| \sqrt{(u_1 h_1)^2 + (v_1 h_1)^2} \\ \bar{\tau}_{ha}(t) = |\sigma_{11a}| \sin \omega t \sqrt{(u_1 h_1)^2 + (v_1 h_1)^2} \end{cases} \quad (C.12)$$

#### C.2.1.1 Cas de la traction alternée symétrique $\sigma_{-1}$

En traction alternée symétrique, la composante  $\sigma_{11m}$  est nulle. Pour cet essai, le gradient de contrainte est nul en l'absence de concentration de contrainte. L'indicateur d'endommagement du critère s'écrit alors :

$$E_h = \text{Max}_t \left( \frac{\tau_{ha}(t) + \alpha \sigma_{hha}(t)}{\theta} \right) \quad (C.13)$$

La fonction de fatigue est égale à :

$$E_{\text{RBG}} = \text{Max}_h(E_h) \quad (\text{C.14})$$

En remplaçant les contraintes par leur expression, on obtient :

$$E_{\text{RBG}} = \text{Max}_h \left( \sigma_{11a} \left( \frac{\sqrt{(u_1 h_1)^2 + (v_1 h_1)^2 + \alpha h_1^2}}{\theta} \right) \right) \quad (\text{C.15})$$

Pour l'essai considéré, il y a symétrie de révolution autour de l'axe 1. Il suffit donc d'examiner ce qui se passe pour les plans dont la normale appartient au plan (1, 3) par exemple. Une rotation autour de l'axe 1 permet de balayer l'ensemble des facettes possibles. Le plan (1, 3) est défini par  $\varphi = 0$ . L'étude est donc faite pour  $\gamma \in [0, \pi]$ . L'expression se réduit alors à :

$$E_{\text{RBG}} = \text{Max}_\gamma \left( \sigma_{11a} \left( \frac{\frac{1}{2} |\sin 2\gamma| + \alpha \sin^2 \gamma}{\theta} \right) \right) \quad (\text{C.16})$$

A la limite de fatigue, on a  $\sigma_{11a} = \sigma_{-1}$  et  $E_{\text{RBG}} = 1$ . Soit :

$$\text{Max}_\gamma \left( \frac{1}{2} |\sin 2\gamma| + \alpha \sin^2 \gamma \right) = \frac{\theta}{\sigma_{-1}} \quad (\text{C.17})$$

La fonction  $f(\gamma, \alpha) = \frac{1}{2} |\sin 2\alpha| + \alpha \sin^2 \gamma$  est une fonction de  $\gamma$  périodique, de période  $\pi$ , et paire en  $\gamma$ . La suite de l'étude est donc faite dans le domaine  $\gamma \in [0, \pi/2]$ . On peut écrire :  $\text{Max}_\gamma \left( \frac{1}{2} |\sin 2\gamma| + \alpha \sin^2 \gamma \right) = \text{Max}_\gamma (f(\gamma, \alpha)) = \frac{\theta}{\sigma_{-1}}$ . L'étude étant faite pour  $\gamma \in [0, \pi/2]$ , on a :  $|\sin 2\gamma| = \sin 2\gamma$ . Les extremums de la fonction  $f$  sont obtenus pour :

$$\frac{\partial f(\gamma, \alpha)}{\partial \gamma} = \cos 2\gamma + \alpha \sin 2\gamma = 0 \quad (\text{C.18})$$

Soit lorsque :  $\text{tg} 2\gamma = -\frac{1}{\alpha}$ . Notons  $\gamma_0$  la solution de l'équation précédente. Le maximum de la fonction  $f$  est alors :

$$f(\gamma_0, \alpha) = \frac{1}{2} |\sin 2\gamma_0| + \alpha \sin^2 \gamma_0 = \frac{1}{2} (\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}) \quad (\text{C.19})$$

Ainsi :

$$\text{Max}_\gamma \left( \frac{1}{2} |\sin 2\gamma| + \alpha \sin^2 \gamma \right) = \frac{1}{2} (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}) = \frac{\theta}{\sigma_{-1}} \quad (\text{C.20})$$

Soit l'équation C.21 :

$$\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} = \frac{2\theta}{\sigma_{-1}} \quad (\text{C.21})$$

### C.2.1.2 Cas de la traction répétée $\sigma_0$

Le tenseur des contraintes en traction répétée conduit à :  $\sigma_{11m} = \sigma_{11a} = \frac{\sigma_0}{2}$ . La contrainte normale moyenne  $\sigma_{hhm}$  agissant sur la facette de normale h est alors égale à  $\frac{\sigma_0}{2} h_1^2$ , soit  $\sigma_{hhm} = \frac{\sigma_0}{2} \sin^2 \gamma$ .

Les contraintes alternées  $\sigma_{hha}(t)$  et  $\tau_{ha}(t)$  sont maximales simultanément. Elles valent respectivement :

$$\text{Max}_t \sigma_{hha}(t) = \frac{\sigma_0}{2} h_1^2 = \frac{\sigma_0}{2} \sin^2 \gamma \quad (\text{C.22})$$

$$\text{Max}_t (\tau_{ha}(t)) = \frac{\sigma_0}{4} |\sin 2\gamma| \quad (\text{C.23})$$

Ecrivons que le critère est vérifié pour cet essai de traction répétée ( $E_{\text{RBG}} = 1$ ), on obtient :

$$\text{Max}_\gamma \left( \frac{1}{2} |\sin 2\gamma| + (\alpha + \beta) \sin^2 \gamma \right) = \frac{2\theta}{\sigma_0} \quad (\text{C.24})$$

L'équation C.24 est semblable à celle établie dans le cas de la traction alternée symétrique,  $\alpha + \beta$  remplaçant le terme  $\alpha$  de l'équation (C.20). D'où son écriture :

$$\alpha + \beta + \sqrt{(\alpha + \beta)^2 + 1} = \frac{4\theta}{\sigma_0} \quad (\text{C.25})$$

## C.2.2. Calage en torsion alternée symétrique $\tau_{-1}$

### C.2.2.1 Contraintes agissant sur le plan physique de normale h

L'essai de torsion conduit, à la surface d'une éprouvette cylindrique de diamètre  $2R_0$ , à la matrice des contraintes suivante :

$$[\sigma(t)] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12}(t) & 0 \\ \sigma_{12}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.26})$$

où  $\sigma_{12}(t) = \sigma_{12m} + \sigma_{12a}(t)$  et avec  $\sigma_{12a}(t) = \sigma_{12a} \sin \omega t$ .

La contrainte normale qui s'exerce sur le plan de normale h ainsi que ses composantes moyennes et alternées s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{hh}(t) = \sigma_{hhm} + \sigma_{hha}(t) \\ \sigma_{hhm} = 2h_1 h_2 \sigma_{12m} = \sigma_{12m} \sin^2 \gamma \sin 2\varphi \\ \sigma_{hha}(t) = 2h_1 h_2 \sigma_{12a}(t) = \sigma_{12a}(t) \sin^2 \gamma \sin 2\varphi \end{cases} \quad (\text{C.27})$$

La contrainte tangentielle moyenne est donnée par :

$$\tau_{hm} = \sqrt{(\sigma_{uhm})^2 + (\sigma_{vhm})^2} \quad (C.28)$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma_{uhm} = \sigma_{12m} \sin \gamma \cos 2\varphi \\ \sigma_{vhm} = -\sigma_{12m} \frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2} \end{cases} \quad (C.29)$$

D'où :

$$\tau_{hm} = \sigma_{12m} \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left(\frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2}\right)^2} \quad (C.30)$$

De même, la partie alternée de la contrainte tangentielle est obtenue ci-dessous par :

$$\begin{aligned} \tau_{ha}(t) &= |\sin \omega t| \sqrt{(\sigma_{uha})^2 + (\sigma_{vha})^2} \\ &= \sigma_{12a} |\sin \omega t| \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left(\frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2}\right)^2} \end{aligned} \quad (C.31)$$

### C.2.2.2 Calcul du gradient de contrainte $G(t)$ en torsion

A un instant  $t$  donné, le gradient de contrainte  $G(t)$  de la contrainte normale  $\sigma_{hh}(t)$  est défini par :

$$G(t) = \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial z}\right)^2} \quad (C.32)$$

Pour une éprouvette de section circulaire de diamètre  $2R_0$ , le gradient de la contrainte normale  $\sigma_{hh}(t)$  en surface de pièce s'écrit après simplification ( $\sigma_{12}(t) = \frac{M_t}{I_0} y$ ,

$$\frac{\partial \sigma_{12}(t)}{\partial y} = \frac{M_t}{I_0} = \frac{\sigma_{12}(t)}{y} ) :$$

$$G(t) = \sqrt{0 + \left(\frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial y}\right)_{y=R_0}^2 + 0} = \left| \frac{\sigma_{hh}(t)}{R_0} \right| \quad (C.33)$$

Soit :

$$G(t) = \left| \frac{\sigma_{12m} + \sigma_{12a}(t)}{R_0} \sin^2 \gamma \sin 2\varphi \right| \quad (C.34)$$

Le terme propre au gradient qui intervient dans la formulation du critère est le suivant (pour  $\sigma_{hh}(t) > 0$ ) :

$$\sqrt{G(t) \sigma_{hh}(t)} = \sqrt{\frac{(\sigma_{hh}(t))^2}{R_0}} = \frac{|\sigma_{12m} + \sigma_{12a}(t)|}{\sqrt{R_0}} \sin^2 \gamma |\sin 2\varphi| \quad (C.35)$$

### C.2.2.3 Calcul de la fonction de fatigue en torsion alternée symétrique

Pour un essai de torsion alternée symétrique,  $\sigma_{\text{hha}}(t)$ ,  $G(t)$  et  $\tau_{\text{ha}}(t)$  sont maximaux simultanément au cours du cycle. Ils valent :

$$\text{Max}_t \sigma_{\text{hha}}(t) = \sigma_{12a} \sin^2 \gamma |\sin 2\varphi| \quad (\text{C.36})$$

$$\text{Max}_t \sqrt{G(t) \langle \sigma_{\text{hh}}(t) \rangle} = \frac{|\sigma_{12m} + \sigma_{12a}| \sin^2 \gamma |\sin 2\varphi|}{\sqrt{R_0}} \quad (\text{C.37})$$

$$\text{Max}_t \tau_{\text{ha}}(t) = \sigma_{12a} \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left( \frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2} \right)^2} \quad (\text{C.38})$$

En introduisant, dans l'indicateur d'endommagement du critère, les équations C.36, C.37 et C.38, on obtient l'équation C.39 suivante :

$$E_h = \frac{1}{\theta} \left( \begin{array}{l} \sigma_{12a} \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left( \frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2} \right)^2} \\ + \left( \alpha \sigma_{12a} + \beta \sigma_{12m} + \delta \frac{|\sigma_{12m} + \sigma_{12a}|}{\sqrt{R_0}} \right) \sin^2 \gamma |\sin 2\varphi| \end{array} \right) \quad (\text{C.39})$$

Sachant que la contrainte moyenne  $\sigma_{12m}$  est nulle pour l'essai de torsion alternée symétrique, l'équation C.39 devient :

$$E_h = \frac{\sigma_{12a}}{\theta} \left( \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left( \frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2} \right)^2} + \left( \alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right) \sin^2 \gamma |\sin 2\varphi| \right) \quad (\text{C.40})$$

A la limite de fatigue du matériau, on a  $\sigma_{12a} = \tau_{-1}$  et  $E_{\text{RBG}} = 1$  conduisant à :

$$E_{\text{RBG}} = \text{Max}_{\varphi, \gamma} \frac{\tau_{-1}}{\theta} \left( \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left( \frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2} \right)^2} + \left( \alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right) \sin^2 \gamma |\sin 2\varphi| \right) = 1 \quad (\text{C.41})$$

En posant  $\lambda = \alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}}$ , on obtient :

$$\text{Max}_{\varphi, \gamma} \left( \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left( \frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2} \right)^2} + \lambda \sin^2 \gamma |\sin 2\varphi| \right) = \frac{\theta}{\tau_{-1}} \quad (\text{C.42})$$

Les angles  $\varphi$  et  $\gamma$  qui définissent la normale  $h$  du plan considéré sont tels que :  $\varphi \in [0, \pi]$  et  $\gamma \in [0, \pi]$ . On pose :

$$g(\varphi, \gamma, \lambda) = \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left( \frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2} \right)^2} + \lambda \sin^2 \gamma |\sin 2\varphi| \quad (\text{C.43})$$

On cherche alors :

$$\text{Max}_{\varphi, \gamma} g(\varphi, \gamma, \lambda) = \text{Max}_{\varphi, \gamma} \left( \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left(\frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2}\right)^2} + \lambda \sin^2 \gamma |\sin 2\varphi| \right) = \frac{\theta}{\tau_{-1}} \quad (\text{C.44})$$

La fonction  $g(\varphi, \gamma, \lambda)$  est périodique de période  $\pi$  et est paire en  $\varphi$  et en  $\gamma$ . Le problème de maximisation est donc résolu dans le domaine  $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ . Pour obtenir les coordonnées sphériques  $\varphi$  et  $\gamma$  de la normale  $h$  au plan où la fonction  $g(\varphi, \gamma, \lambda)$  est maximale, on écrit que ses dérivées partielles par rapport à  $\varphi$  et  $\gamma$  sont nulles :

- Première condition :  $\frac{\partial g(\varphi, \gamma, \lambda)}{\partial \varphi} = 0$ .

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \frac{-4 \sin^2 \gamma \cos 2\varphi \sin 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos 2\varphi \sin 2\varphi}{2\sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left(\frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2}\right)^2}} + 2\lambda \sin^2 \gamma \cos 2\varphi \quad (\text{C.45})$$

Ainsi la condition  $\frac{\partial g(\varphi, \gamma, \lambda)}{\partial \varphi} = 0$  entraîne :

$$\left( 2 \sin 2\varphi (\cos^2 \gamma - 1) + \lambda \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left(\frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2}\right)^2} \right) \sin^2 \gamma \cos 2\varphi = 0 \quad (\text{C.46})$$

- Deuxième condition :  $\frac{\partial g(\varphi, \gamma, \lambda)}{\partial \gamma} = 0$ .

$$\frac{\partial g}{\partial \gamma} = \frac{2 \sin \gamma \cos^2 2\varphi \cos \gamma + \sin 2\gamma \cos 2\gamma \sin^2 2\varphi}{2\sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left(\frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2}\right)^2}} + 2\lambda \sin \gamma \cos \gamma \sin 2\varphi \quad (\text{C.47})$$

Ainsi, la condition  $\frac{\partial g(\varphi, \gamma, \lambda)}{\partial \gamma} = 0$  entraîne :

$$\sin 2\gamma \left( \cos^2 2\varphi + \cos 2\gamma \sin^2 2\varphi + 2\lambda \sin 2\varphi \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left(\frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2}\right)^2} \right) = 0 \quad (\text{C.48})$$

Les deux équations C.46 et C.48 forment un système de deux équations à deux inconnues qu'il faut résoudre pour déterminer la valeurs des angles  $\varphi$  et  $\gamma$  où la fonction  $g$  est maximum :

$$\begin{cases} \left( \sin 2\varphi (\cos^2 \gamma - 1) + \lambda \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left(\frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2}\right)^2} \right) \sin^2 \gamma \cos 2\varphi = 0 \\ \sin 2\gamma \left( \cos^2 2\varphi + \cos 2\gamma \sin^2 2\varphi + 2\lambda \sin 2\varphi \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left(\frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2}\right)^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.49})$$

De ce système se dégagent trois solutions évidentes :

- $\varphi = \varphi_0 = \pi/4$

$$g\left(\frac{\pi}{4}, \gamma, \lambda\right) = \frac{1}{2} |\sin 2\gamma| + \lambda \sin^2 \gamma \quad (\text{C.50})$$

Cette solution est celle trouvée dans le cas de la traction et correspond à :

$$g\left(\frac{\pi}{4}, \gamma, \lambda\right) = \frac{1}{2} (\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}) \quad (\text{C.51})$$

- $\gamma = \gamma_0 = 0$

$$g(\varphi, 0, \lambda) = 0 \quad (\text{C.52})$$

- $\gamma = \gamma_0 = \pi/2$

$$g\left(\varphi, \frac{\pi}{2}, \lambda\right) = |\cos 2\varphi| + \lambda \sin 2\varphi \quad (\text{C.53})$$

L'étude de cette solution conduit à :  $\text{tg} 2\varphi = \lambda$ , d'où :

$$g\left(\varphi, \frac{\pi}{2}, \lambda\right) = \sqrt{\lambda^2 + 1} \quad (\text{C.54})$$

On cherche ensuite les solutions autres que les trois déjà évoquées. Elles sont obtenues en résolvant le système ci-après :

$$\begin{cases} \sin 2\varphi (\cos^2 \gamma - 1) + \lambda \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left(\frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2}\right)^2} = 0 \\ \cos^2 2\varphi + \cos 2\gamma \sin^2 2\varphi + 2\lambda \sin 2\varphi \sqrt{(\sin \gamma \cos 2\varphi)^2 + \left(\frac{\sin 2\gamma \sin 2\varphi}{2}\right)^2} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.55})$$

Le rapport des termes du système C.55 conduit à  $\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi = 0$  qui est une équation sans solution. La solution correspond alors au maximum des équations C.51 et C.54. Comme le terme  $\sqrt{\lambda^2 + 1}$  est strictement supérieur au terme  $\frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1})$ , la solution retenue est la suivante :

$$\text{Max}_{\varphi, \gamma} g(\varphi, \gamma, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 + 1} \quad (\text{C.56})$$

En remplaçant  $\lambda$  par  $\alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}}$  on obtient :

$$\text{Max}_{\varphi, \gamma} g(\varphi, \gamma, \lambda) = \sqrt{1 + \left(\alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}}\right)^2} \quad (\text{C.57})$$

D'où :

$$\text{Max}_{\varphi, \gamma} g(\varphi, \gamma, \lambda) = \sqrt{1 + \left(\alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}}\right)^2} = \frac{\theta}{\tau_{-1}} \quad (\text{C.58})$$



Soit :

$$\sqrt{1 + \left( \alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right)^2} = \frac{\theta}{\tau_{-1}} \quad (\text{C.59})$$

### C.2.3. Calage en flexion à moment constant

#### C.2.3.1 Calcul des contraintes agissant sur le plan de normale h

Soit la matrice des contraintes associée à la sollicitation de flexion :

$$[\sigma(t)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.60})$$

avec :

$$\sigma_{11}(t) = \sigma_{11m} + \sigma_{11a} \sin \omega t \quad (\text{C.61})$$

L'état de contrainte est identique à celui vu en traction, d'où :

$$\sigma_{hh}(t) = \sigma_{hhm} + \sigma_{hha} \sin \omega t \quad (\text{C.62})$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma_{hhm} = \sigma_{11m} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \\ \sigma_{hha} = \sigma_{11a} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (\text{C.63})$$

Les termes issus de la contrainte tangentielle sur le plan considéré sont donnés ci-dessous par :

$$\tau_h(t) = \tau_{hm} + \tau_{ha}(t) \quad (\text{C.64})$$

avec :

$$\begin{cases} \tau_{hm} = \frac{|\sigma_{11m}|}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} \\ \tau_{ha} = \text{Max}_t(\tau_{ha}(t)) = \frac{\sigma_{11a}}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} \end{cases} \quad (\text{C.65})$$

#### C.2.3.2 Calcul du gradient de la contrainte normale G(t)

Pour une éprouvette à section circulaire, de diamètre  $2R_0$  et soumise à un moment de flexion constant le long de son axe, on a :

$$G(t) = \sqrt{\left( \frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial z} \right)^2} \quad (\text{C.66})$$

Soit :

$$G(t) = \sqrt{0 + \left( \frac{\partial \sigma_{hh}(t)}{\partial y} \right)_{y=R_0}^2} + 0 = \frac{|\sigma_{hh}(t)|}{R_0} \quad (C.67)$$

ou encore :

$$G(t) = \frac{|\sigma_{hhm} + \sigma_{hha}(t)|}{R_0} \quad (C.68)$$

D'où :

$$G(t) = \frac{|\sigma_{11m} + \sigma_{11a}(t)|}{R_0} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \quad (C.69)$$

Le calcul de  $\sqrt{G(t)\langle\sigma_{hh}(t)\rangle}$  donne finalement :

$$\sqrt{G(t)\langle\sigma_{hh}(t)\rangle} = \frac{|\sigma_{11m} + \sigma_{11a}(t)|}{\sqrt{R_0}} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \quad (C.70)$$

$\sigma_{hha}(t)$ ,  $\sqrt{G(t)\langle\sigma_{hh}(t)\rangle}$  et  $\tau_{ha}(t)$  sont tous maximaux simultanément au cours du cycle de flexion. En les introduisant dans l'indicateur d'endommagement  $E_h$  du critère on obtient :

$$E_h = \frac{1}{\theta} \left( \frac{\sigma_{11a}}{2} \sqrt{(\sin \gamma \sin 2\varphi)^2 + (\sin 2\gamma \cos^2 \varphi)^2} + \left( \alpha \sigma_{11a} + \beta \sigma_{11m} + \delta \frac{|\sigma_{11m} + \sigma_{11a}|}{\sqrt{R_0}} \right) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right) \quad (C.71)$$

### C.2.3.3 Calage en flexion alternée symétrique $f_{-1}$

En flexion alternée symétrique à la limite de fatigue, on a  $E_{R_{BG}} = 1$  avec  $\sigma_{11a} = f_{-1}$  et  $\sigma_{11m} = 0$ . D'où :

$$E_{R_{BG}} = \text{Max}_{\varphi, \gamma} \frac{f_{-1}}{2\theta} \left( \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + 2 \left( \alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right) = 1 \quad (C.72)$$

Soit :

$$\text{Max}_{\varphi, \gamma} \left( \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + 2 \left( \alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right) = \frac{2\theta}{f_{-1}} \quad (C.73)$$

Posons :

$$h(\varphi, \gamma, \lambda) = \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + 2\lambda \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \quad (C.74)$$

avec :

$$\lambda = \alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \quad (C.75)$$

La recherche du maximum de la fonction  $h(\varphi, \gamma, \lambda)$  conduit à la solution suivante :

$$\text{Max}_{\varphi, \gamma} h(\varphi, \gamma, \lambda) = \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} \quad (\text{C.76})$$

Ainsi, on aboutit à :

$$\left( \alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} + \sqrt{\left( \alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right)^2 + 1} \right) = \frac{2\theta}{f_{-1}} \quad (\text{C.77})$$

#### C.2.3.4 Calage en flexion répétée $f_0$

En flexion répétée à la limite de fatigue le critère s'écrit :  $E_{\text{RBG}} = 1$

avec  $\sigma_{11m} = \sigma_{11a} = f_0/2$ . D'où :

$$\text{Max}_{\varphi, \gamma} \left( \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + 2 \left( \alpha + \beta + \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} \right) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right) = \frac{4\theta}{f_0} \quad (\text{C.78})$$

Posons :

$$h(\varphi, \gamma, \lambda) = \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + 2\lambda \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \quad (\text{C.79})$$

avec :

$$\lambda = \alpha + \beta + \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} \quad (\text{C.80})$$

La même démarche que précédemment est appliquée. Elle conduit à la même solution, pour le maximum de la fonction  $h(\varphi, \gamma, \lambda)$  :

$$\text{Max}_{\varphi, \gamma} h(\varphi, \gamma, \lambda) = \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} \quad (\text{C.81})$$

Soit l'équation :

$$\left( \alpha + \beta + \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} + \sqrt{\left( \alpha + \beta + \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} \right)^2 + 1} \right) = \frac{4\theta}{f_0} \quad (\text{C.82})$$

#### C.2.4 Bilan des équations de calage

Les cinq équations (C.21, C.25, C.59, C.77 et C.82) nécessaires à la détermination des constantes du critère sont rappelées ci-dessous :

$$\textit{Traction alternée} \quad \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} = \frac{2\theta}{\sigma_{-1}} \quad (\text{C.83})$$

$$\textit{Traction répétée} \quad \alpha + \beta + \sqrt{(\alpha + \beta)^2 + 1} = \frac{4\theta}{\sigma_0} \quad (\text{C.84})$$

$$\text{Torsion alternée} \quad \sqrt{1 + \left( \alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right)^2} = \frac{\theta}{\tau_{-1}} \quad (\text{C.85})$$

$$\text{Flexion alternée} \quad \left( \alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} + \sqrt{\left( \alpha + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right)^2 + 1} \right) = \frac{2\theta}{f_{-1}} \quad (\text{C.86})$$

$$\text{Flexion répétée} \quad \left( \alpha + \beta + \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} + \sqrt{\left( \alpha + \beta + \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} \right)^2 + 1} \right) = \frac{4\theta}{f_0} \quad (\text{C.87})$$

où  $R_0$  est le rayon de l'éprouvette utilisée lors du calage en torsion, en flexion alternée symétrique et en flexion répétée.

La résolution du système à quatre inconnues  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  et  $\delta$  formé par les quatre équations C.83, C.84, C.85 et C.86 correspond au calage du critère avec les limites de fatigue suivantes :  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_0$ ,  $f_{-1}$  et  $\tau_{-1}$ . Ceci constitue le premier calage. Le second calage est obtenu en résolvant le système formé par les équations C.83, C.85, C.86 et C.87. Il s'agit cette fois de déterminer les quatre inconnues  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  et  $\delta$  à partir des limites de fatigue  $\sigma_{-1}$ ,  $f_0$ ,  $f_{-1}$  et  $\tau_{-1}$ .

#### C.2.4.1 Résultats du premier calage ( $\sigma_{-1}, \sigma_0, f_{-1}, \tau_{-1}$ )

$$\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_{-1} f_{-1}^2}{f_{-1} - \tau_{-1}}} \quad (\text{C.88})$$

$$\alpha = \frac{\theta}{\sigma_{-1}} - \frac{\sigma_{-1}}{4\theta} \quad (\text{C.89})$$

$$\beta = \frac{2\theta}{\sigma_0} - \frac{\sigma_0}{8\theta} - \alpha \quad (\text{C.90})$$

$$\delta = \sqrt{R_0} \left( \frac{2\theta}{f_{-1}} - \frac{\theta}{\tau_{-1}} - \alpha \right) \quad (\text{C.91})$$

#### C.2.4.2 Résultats du second calage ( $\sigma_{-1}, f_0, f_{-1}, \tau_{-1}$ )

$$\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_{-1} f_{-1}^2}{f_{-1} - \tau_{-1}}} \quad (\text{C.92})$$

$$\alpha = \frac{\theta}{\sigma_{-1}} - \frac{\sigma_{-1}}{4\theta} \quad (\text{C.93})$$

$$\delta = \sqrt{R_0} \left( \frac{2\theta}{f_{-1}} - \frac{\theta}{\tau_{-1}} - \alpha \right) \quad (\text{C.94})$$

$$\beta = \frac{2\theta}{f_0} - \frac{f_0}{8\theta} - \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} - \alpha \quad (\text{C.95})$$

### C.3 Calage du critère de Fogue intégrant le gradient de contrainte

Le calage du critère de Fogue avec intégration du gradient de contrainte réutilise de nombreuses écritures obtenues lors du calage précédent (cf. paragraphe C.2). Afin de ne pas répéter un grand nombre d'équations ni surcharger l'annexe, seules les principales étapes du calage sont présentées ici.

#### C.3.1 Calage en traction-compression

##### C.3.1.1 Traction alternée symétrique $\sigma_{-1}$

En traction alternée symétrique, on a :  $\sigma_{11m} = 0$ ,  $\sigma_{11a} = \sigma_{-1}$  et  $G = 0$  car la contrainte normale de traction-compression, en l'absence de concentration de contrainte, est à gradient géométrique nul (champ de contrainte uniforme à tout instant). Les paramètres des contraintes utilisés dans le critère et relatifs au plan matériel de normale  $h$  sont donc :

$$\tau_{ha} = \frac{\sigma_{-1}}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} \quad (\text{C.96})$$

$$\sigma_{hha} = \sigma_{-1} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \quad (\text{C.97})$$

L'indicateur d'endommagement  $E_h$  s'écrit alors :

$$E_h = \frac{a}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + b \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \quad (\text{C.98})$$

La fonction de fatigue du critère  $E_{FGG}$  s'écrit :

$$E_{FGG} = \sqrt{\frac{1}{S} \int_S \left( \frac{a}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + b \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right)^2 dS} \quad (\text{C.99})$$

Sachant que  $S = 4\pi$  et  $dS = \sin \gamma d\varphi d\gamma$ , on aboutit à :

$$E_{FGG} = \sqrt{\{I_1 b^2 + I_2 ab + I_3 a^2\}} \quad (\text{C.100})$$

avec :

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^5 \gamma \cos^4 \varphi d\varphi d\gamma \quad (\text{C.101})$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \gamma \cos^2 \varphi \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} d\varphi d\gamma \quad (C.102)$$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin \gamma (\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi) d\varphi d\gamma \quad (C.103)$$

Après calculs numériques, on obtient :  $I_1 = \frac{3}{15}$ ,  $I_2 = \frac{4}{15}$  et  $I_3 = \frac{2}{15}$ . A la limite de fatigue, la fonction de fatigue  $E_{FGG}$  du critère est égale à l'unité, donc :

$$I_1 b^2 + I_2 ab + I_3 a^2 = 1 \quad (C.104)$$

### C.3.1.2 Traction répétée $\sigma_0$

Un cycle de traction répétée est caractérisé par :

$$\sigma_{11m} = \sigma_{11a} = \frac{\sigma_0}{2} \quad (C.105)$$

Les contraintes normale et tangentielle agissant sur le plan de normale h sont :

$$\sigma_{hnm} = \sigma_{hna} = \frac{\sigma_0}{2} h_1^2 = \frac{\sigma_0}{2} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \quad (C.106)$$

$$\tau_{ha} = \frac{\sigma_0}{4} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} \quad (C.107)$$

L'indicateur d'endommagement du critère relatif au plan s'exprime de la manière suivante :

$$E_h = \frac{\sigma_0}{2\sigma_{-1}} \left( \frac{a}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + (b+d) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right) \quad (C.108)$$

Là encore, pour ce type de sollicitation, le gradient géométrique des contraintes est nul et la fonction de fatigue vaut donc :

$$E_{FGG} = \frac{\sigma_0}{2\sigma_{-1}} \sqrt{\frac{1}{S} \int_S \left( \frac{a}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + (b+d) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right)^2 dS} \quad (C.109)$$

où  $S = 4\pi$  et  $dS = \sin \gamma d\varphi d\gamma$ . On pose comme précédemment :

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^5 \gamma \cos^4 \varphi d\varphi d\gamma \quad (C.110)$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \gamma \cos^2 \varphi \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} d\varphi d\gamma \quad (C.111)$$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin \gamma (\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi) d\varphi d\gamma \quad (C.112)$$

Ces intégrales sont identiques à celles obtenues dans le cas de la traction alternée symétrique, soit :  $I_1 = \frac{3}{15}$ ,  $I_2 = \frac{4}{15}$  et  $I_3 = \frac{2}{15}$ . Avec ces intégrales et à la limite de fatigue du matériau considéré ( $E_{FGG} = 1$ ), l'équation C.109 s'écrit :

$$I_1(b+d)^2 + I_2a(b+d) + I_3a^2 = \left( \frac{2\sigma_{-1}}{\sigma_0} \right)^2 \quad (C.113)$$

### C.3.2 Calage en torsion alternée symétrique $\tau_{-1}$

La matrice des contraintes associée à ce type de sollicitation est de la forme :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.114)$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \sigma_{12m} + \sigma_{12a} \sin \omega t \\ \sigma_{12a} = \tau_{-1} \\ \sigma_{12m} = 0 \end{cases} \quad (C.115)$$

Les amplitudes et valeurs moyennes des contraintes normale et tangentielle sur le plan de normale h sont :

$$\begin{cases} \sigma_{hha} = \tau_{-1} \sin^2 \gamma |\sin 2\varphi| \\ \sigma_{hhm} = 0 \\ \tau_{ha} = \tau_{-1} \sqrt{\sin^2 \gamma \cos^2 2\varphi + \frac{\sin^2 2\gamma \sin^2 2\varphi}{4}} \\ \tau_{hm} = 0 \end{cases} \quad (C.116)$$

Pour une éprouvette à section circulaire de rayon  $R_0$ , le gradient de la contrainte normale maximale s'exprime de la façon suivante :

$$G = \sqrt{\left( \frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial z} \right)^2} = \frac{\tau_{-1}}{R_0} \sin^2 \gamma \sin 2\varphi \quad (C.117)$$

D'où :

$$\sqrt{G \langle \sigma_{hh\max} \rangle} = \frac{\tau_{-1}}{\sqrt{R_0}} \sin^2 \gamma |\sin 2\varphi| \quad (C.118)$$

Les expressions C.116 et C.118 permettent de définir l'indicateur d'endommagement du critère pour tout plan de normale h :

$$E_h = \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} \left[ a \sqrt{\sin^2 \gamma \cos^2 2\varphi + \frac{\sin^2 2\gamma \sin^2 2\varphi}{4}} + \left( b + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right) \sin^2 \gamma |\sin 2\varphi| \right] \quad (C.119)$$

A la limite de fatigue ( $E_{FGG} = 1$ ), on a :

$$\sqrt{\frac{1}{S_s} \int \left[ a \sqrt{\sin^2 \gamma \cos^2 2\varphi + \frac{\sin^2 2\gamma \sin^2 2\varphi}{4}} + \left( b + \delta \sqrt{\frac{1}{R_0}} \right) \sin^2 \gamma |\sin 2\varphi| \right]^2 dS} = \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \quad (C.120)$$

L'équation C.120 fait apparaître les intégrales suivantes :

$$I_{13} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^5 \gamma \sin^2 2\varphi d\varphi d\gamma \quad (C.121)$$

$$I_{23} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \gamma |\sin 2\varphi| \sqrt{\sin^2 \gamma \cos^2 2\varphi + \frac{\sin^2 2\gamma \sin^2 2\varphi}{4}} d\varphi d\gamma \quad (C.122)$$

$$I_{33} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \gamma \left( \sin^2 \gamma \cos^2 2\varphi + \frac{\sin^2 2\gamma \sin^2 2\varphi}{4} \right) d\varphi d\gamma \quad (C.123)$$

Les intégrations, une fois réalisées numériquement, donnent les valeurs suivantes :  $I_{13} = \frac{4}{15}$ ,  $I_{23} = \frac{7}{30}$ ,  $I_{33} = \frac{6}{15}$ . En élevant au carré et en tenant compte des intégrales ci-dessus, on obtient :

$$I_{13} \left( b + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right)^2 + 2I_{23} a \left( b + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right) + I_{33} a^2 = \left( \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \right)^2 \quad (C.124)$$

### C.3.3 Calage en flexion à moment constant

#### C.3.3.1 Calcul des contraintes agissant sur le plan de normale h

Soit la matrice suivante associée à la sollicitation de flexion :

$$[\sigma(t)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.125)$$

où :

$$\sigma_{11}(t) = \sigma_{11m} + \sigma_{11a} \sin(\omega t) \quad (C.126)$$

La contrainte normale maximale dans la direction h est :

$$\sigma_{hh\max} = \sigma_{h1m} + \sigma_{h1a} \quad (C.127)$$

On en déduit les termes de contraintes suivants :

$$\begin{cases} \sigma_{hh\max} = (\sigma_{11m} + \sigma_{11a}) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \\ \sigma_{h1m} = \sigma_{11m} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \\ \sigma_{h1a} = \sigma_{11a} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (C.128)$$



Les composantes de la contrainte tangentielle dans le plan physique sont données par :

$$\begin{cases} \tau_{hm} = \sigma_{11m} \sqrt{(u_1 h_1)^2 + (v_1 h_1)^2} = \frac{\sigma_{11m}}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} \\ \tau_{ha} = \sigma_{11a} \sqrt{(u_1 h_1)^2 + (v_1 h_1)^2} = \frac{\sigma_{11a}}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} \end{cases} \quad (C.129)$$

### C.3.3.2 Calcul du gradient de la contrainte normale maximale G

Le gradient géométrique G de la contrainte normale maximale est défini par :

$$G = \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{hh\max}}{\partial z}\right)^2} \quad (C.130)$$

Soit, après calculs :

$$G = \frac{\sigma_{hhm} + \sigma_{hha}}{R_0} = \frac{\sigma_{11m} + \sigma_{11a}}{R_0} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \quad (C.131)$$

Le terme  $\sqrt{G \langle \sigma_{hh\max} \rangle}$  s'exprime de la manière suivante :

$$\sqrt{G \langle \sigma_{hh\max} \rangle} = \frac{\sigma_{11m} + \sigma_{11a}}{\sqrt{R_0}} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \quad (C.132)$$

En introduisant les expressions C.128, C.129 et C.132 dans l'indicateur d'endommagement  $E_h$  du critère  $E_{FGG}$ , celui-ci s'écrit :

$$E_h = \frac{1}{\sigma_{-1}} \left( a \frac{\sigma_{11a}}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + \left( b \sigma_{11a} + d \sigma_{11m} + \frac{\delta (\sigma_{11m} + \sigma_{11a})}{\sqrt{R_0}} \right) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right) \quad (C.133)$$

### C.3.3.3 Calage en flexion alternée symétrique $f_{-1}$

En flexion alternée symétrique, on a :  $\sigma_{11m} = 0$ ,  $\sigma_{11a} = f_{-1}$  et  $G = \frac{f_{-1}}{R_0} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi$ .

D'où l'expression suivante de l'indicateur d'endommagement :

$$E_h = \frac{f_{-1}}{\sigma_{-1}} \left( \frac{a}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + \left( b + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right) \quad (C.134)$$

La fonction de fatigue  $E_{FGG}$  pour cette sollicitation est donnée par :

$$E_{FGG} = \frac{f_{-1}}{\sigma_{-1}} \sqrt{\frac{1}{S} \int_S \left( \frac{a}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + \left( b + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right)^2 dS} \quad (C.135)$$

A la limite de fatigue du matériau, on a  $E_{FGG} = 1$  ; on obtient donc :

$$\frac{f_{-1}}{\sigma_{-1}} \sqrt{\frac{1}{S} \int_S \left( \frac{a}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + \left( b + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right)^2} dS = 1 \quad (C.136)$$

Avec  $I_1 = \frac{3}{15}$ ,  $I_2 = \frac{4}{15}$  et  $I_3 = \frac{2}{15}$ , les intégrales définies au paragraphe C.3.1.1 la relation ci-dessus s'écrit simplement :

$$I_1 \left( b + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right)^2 + I_2 a \left( b + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right) + I_3 a^2 = \left( \frac{\sigma_{-1}}{f_{-1}} \right)^2 \quad (C.137)$$

#### C.3.3.4 Calage en flexion répétée $f_0$

En flexion répétée, on a  $\sigma_{1m} = \sigma_{1ta} = f_0/2$  et  $G = \frac{f_0}{R_0} \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi$ . La fonction de fatigue  $E_{FGG}$  pour cette sollicitation est définie par :

$$E_{FGG} = \frac{f_0}{2\sigma_{-1}} \sqrt{\frac{1}{S} \int_S \left( \frac{a}{2} \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\gamma \cos^4 \varphi} + \left( d + b + \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} \right) \sin^2 \gamma \cos^2 \varphi \right)^2} ds \quad (C.138)$$

A la limite de fatigue ( $E_{FGG} = 1$ ) et toujours avec  $I_1 = \frac{3}{15}$ ,  $I_2 = \frac{4}{15}$  et  $I_3 = \frac{2}{15}$ , le critère conduit à la relation suivante :

$$I_1 \left( d + b + \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} \right)^2 + I_2 a \left( d + b + \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} \right) + I_3 a^2 = \left( \frac{2\sigma_{-1}}{f_0} \right)^2 \quad (C.139)$$

#### C.3.4 Bilan des équations de calage

Les équations issues des 5 sollicitations simples sont les suivantes :

$$\text{Traction alternée} \quad I_1 b^2 + I_2 ab + I_3 a^2 = 1 \quad (C.140)$$

$$\text{Traction répétée} \quad I_1 (b + d)^2 + I_2 a(b + d) + I_3 a^2 = \left( \frac{2\sigma_{-1}}{\sigma_0} \right)^2 \quad (C.141)$$

$$\text{Torsion alternée} \quad I_{13} \left( b + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right)^2 + 2I_{23} a \left( b + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right) + I_{33} a^2 = \left( \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \right)^2 \quad (C.142)$$

$$\text{Flexion alternée} \quad I_1 \left( b + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right)^2 + I_2 a \left( b + \frac{\delta}{\sqrt{R_0}} \right) + I_3 a^2 = \left( \frac{\sigma_{-1}}{f_{-1}} \right)^2 \quad (\text{C.143})$$

$$\text{Flexion répétée} \quad I_1 \left( d + b + \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} \right)^2 + I_2 a \left( d + b + \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} \right) + I_3 a^2 = \left( \frac{2\sigma_{-1}}{f_0} \right)^2 \quad (\text{C.144})$$

avec  $I_{13} = \frac{4}{15}$ ,  $I_{23} = \frac{7}{30}$ ,  $I_{33} = \frac{6}{15}$ ,  $I_1 = \frac{3}{15}$ ,  $I_2 = \frac{4}{15}$  et  $I_3 = \frac{2}{15}$ , et où  $R_0$  est le rayon de l'éprouvette utilisée lors du calage en torsion, en flexion alternée symétrique et en flexion répétée.

La résolution du système à quatre inconnues  $a$ ,  $b$ ,  $d$  et  $\delta$  formé par les équations C.140, C.141, C.142 et C.143 (calage du critère avec  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_0$ ,  $f_{-1}$  et  $\tau_{-1}$ ) constitue le premier calage. Le second calage est obtenu en résolvant le système d'équations C.140, C.142, C.143 et C.144 (calage du critère avec  $\sigma_{-1}$ ,  $f_0$ ,  $f_{-1}$  et  $\tau_{-1}$ ).

#### C.3.4.1 Résultats du premier calage ( $\sigma_{-1}, \sigma_0, f_{-1}, \tau_{-1}$ )

$$a = \frac{y_5}{\alpha} - \alpha \quad (\text{C.145})$$

$$b = \frac{-2a + \sqrt{45 - 2a^2}}{3} \quad (\text{C.146})$$

$$d = \frac{-(6b + 4a) + \sqrt{(6b + 4a)^2 - 180(1 - y_1)}}{6} \quad (\text{C.147})$$

$$\delta = (\alpha - b)\sqrt{R_0} \quad (\text{C.148})$$

$$\text{avec } \alpha = \sqrt{\frac{15y_3 - \sqrt{15^2 y_3^2 - 8y_5^2}}{2}}, \quad y_1 = \left( \frac{2\sigma_{-1}}{\sigma_0} \right)^2, \quad y_2 = \left( \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \right)^2, \quad y_3 = \left( \frac{\sigma_{-1}}{f_{-1}} \right)^2 \text{ et}$$

$$y_5 = 9y_3 - 3y_2.$$

#### C.3.4.2 Résultats du second calage ( $\sigma_{-1}, f_0, f_{-1}, \tau_{-1}$ )

$$a = \frac{y_5}{\alpha} - \alpha \quad (\text{C.149})$$

$$b = \frac{-2a + \sqrt{45 - 2a^2}}{3} \quad (\text{C.150})$$

$$d = \theta - \frac{2\delta}{\sqrt{R_0}} \quad (\text{C.151})$$

$$\delta = (\alpha - b)\sqrt{R_0} \quad (\text{C.152})$$

$$\text{avec } \theta = \frac{-(6b + 4a) + \sqrt{(6b + 4a)^2 - 180(1 - y_4)}}{6}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{15y_3 - \sqrt{15^2 y_3^2 - 8y_5^2}}{2}},$$

$$y_2 = \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2, \quad y_3 = \left(\frac{\sigma_{-1}}{f_{-1}}\right)^2, \quad y_4 = \left(\frac{2\sigma_{-1}}{f_0}\right)^2 \text{ et } y_5 = 9y_3 - 3y_2.$$