

---

# Modélisation d'une section de poutre fissurée en flexion

## Prise en compte des efforts tranchants

Christophe Varé\* — Stéphane Andrieux\*\*

\* EDF R&D, Département AMA  
1, av. du Général de Gaulle, 92141 Clamart cedex  
christophe.vare@edf.fr

\*\* Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles et Durables  
UMR CNRS-EDF 2832, 1, av. du Général de Gaulle, 92141 Clamart cedex  
stephane.andrieux@edf.fr

---

*RÉSUMÉ.* La modélisation numérique est couramment employée pour étudier le comportement dynamique des rotors fissurés de machines tournantes dans la mesure où cet aléa est rare et ne permet donc pas la constitution d'un retour d'expérience industriel exploitable. Une méthode originale de calcul de la loi de comportement en flexion d'une section de poutre fissurée a été présentée précédemment. L'objectif du présent article consiste à compléter cette première modélisation en y intégrant les effets des efforts tranchants. Pour certaines géométries de fissure, on constate que des simplifications peuvent être apportées dans la mesure où les relations selon les moments de flexion d'une part et les efforts tranchants d'autre part sont découplées et dans la mesure où le comportement selon les efforts tranchants est linéaire. Les développements ont été menés à leur terme dans ce cas et on pu faire l'objet d'une première validation qui est présentée.

*ABSTRACT.* Numerical processing is widely used to study the dynamical behaviour of turbines cracked shaft as this event is rare and then doesn't enable to have a useful industrial feedback. A new method, which enables to calculate the constitutive law of a cracked beam subjected to bending was previously proposed. The aim of this paper is to complete this first model by adding shear effects. For some crack geometry, it can be possible to simplify the proposed beam model since bending moments and shear forces are uncoupled and the behaviour law associated with the shear forces is linear. Developments were done in this case and some results of the validation are shown.

*MOTS-CLÉS :* fissure, rotor, turbine, efforts tranchants, contact unilatéral, analyse convexe

*KEYWORDS:* crack, rotor, turbine, shear effects, unilateral contact, convex analysis

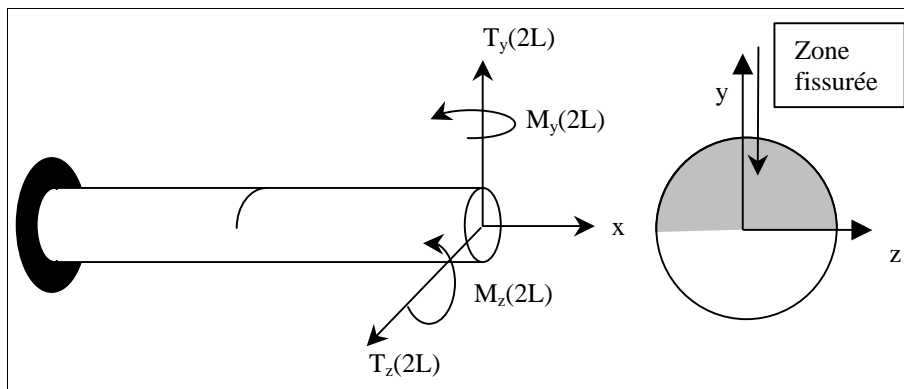
---

## 1. Introduction

Une méthode originale de calcul de la loi de comportement en flexion d'une poutre fissurée a été proposée dans (Varé *et al.*, 2000) et (Andrieux *et al.*, 2002). Elle consiste à définir, à partir de calculs 3D tenant compte du contact unilatéral entre les lèvres de la fissure, une relation de comportement non linéaire entre le moment de flexion appliqué à la section fissurée et le champ de déplacements résultant, compatible avec la théorie des poutres afin d'en permettre l'introduction dans un modèle filaire. Cette démarche a été validée expérimentalement (Audebert *et al.*, 2002). Puis elle a été mise en œuvre avec succès sur plusieurs cas industriels, en particulier des turbines. L'apport de la démarche par rapport aux modèles déjà existants (Wauer, 1991, Gash, 1993, Dimarogonas, 1996) est double : elle autorise la prise en compte de fissures planes de forme et de nombre quelconque dans la section fissurée et elle tient compte de façon exacte des conditions de contact unilatéral et des fermetures partielles de la fissure sous certains chargements. Par ailleurs, les propriétés de la solution tridimensionnelle permettent de réduire considérablement le nombre de calculs nécessaires à la construction de la loi de comportement. L'analyse menée sur d'autres machines telles que les pompes à axe de rotor vertical (Bachschnid *et al.*, 2004) a néanmoins montré que le torseur d'efforts s'appliquant aux sections susceptibles de fissurer présentait une composante de cisaillement significative nécessitant d'intégrer les efforts tranchants au modèle.

## 2. Observations issues de calculs éléments finis tridimensionnels

Le modèle retenu est celui d'une poutre fissurée en son milieu, de longueur  $2L$ , de rayon  $R$ , de module d'Young  $E$  et d'inertie quadratique  $I$ . La poutre est encastree en son extrémité gauche et sollicitée en son extrémité droite. Des conditions de contact unilatéral sont considérées sur les lèvres de la fissure.



**Figure 1.** Modèle de rotor fissuré retenu

Dans la continuité des études menées précédemment, la section fissurée est représentée par un élément nodal dont on cherche à identifier la loi de comportement. L'élément nodal porte 4 degrés de liberté :

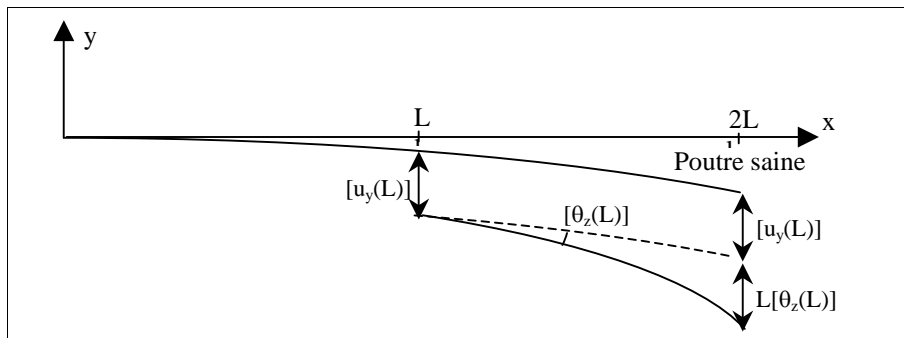
$$[q(L)] = \begin{pmatrix} [u_y(L)] \\ [u_z(L)] \\ [\theta_y(L)] \\ [\theta_z(L)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y(L^+) - u_y(L^-) \\ u_z(L^+) - u_z(L^-) \\ \theta_y(L^+) - \theta_y(L^-) \\ \theta_z(L^+) - \theta_z(L^-) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Saut de déplacement selon } y \\ \text{Saut de déplacement selon } z \\ \text{Saut de rotation selon } y \\ \text{Saut de rotation selon } z \end{array} \quad [1]$$

Identifier la loi de comportement de l'élément nodal revient donc à établir la loi qui relie le vecteur  $[q(L)]$  aux efforts internes à la poutre à l'abscisse  $x=L$ .

Dans l'étude de (El-arem *et al.*, 2003) appliquée à l'analyse du comportement en flexion plane d'une poutre, les auteurs ont observé deux propriétés susceptibles de simplifier considérablement le modèle. Il est ainsi apparu que les relations de la loi de comportement de la section fissurée, selon le moment de flexion d'une part et l'effort tranchant d'autre part, étaient découplées et que le comportement de la section fissurée selon l'effort tranchant était linéaire bien que l'on tienne compte des conditions de contact entre les lèvres de la fissure. Dans cette partie, on présente donc des simulations numériques 3D dont l'objectif est d'observer si ces propriétés sont encore vraies lorsque le déplacement de la poutre fissurée n'est plus contenu dans un plan. Pour les interpréter ces calculs, on retient en première approximation les relations cinématiques simplifiées suivantes :

- Saut de rotation au droit de la fissure :  $[\theta_y(L)] = \theta_y^{SF}(2L) - \theta_y^{SS}(2L)$
- Saut de déplacement :  $[u_y(L)] = u_y^{SF}(2L) - L[\theta_z(L)] - u_y^{SS}(2L)$

où l'exposant SF désigne les résultats obtenus sur la structure fissurée et l'exposant SS ceux obtenus sur la structure saine. Ces formulations correspondent à la représentation graphique suivante :



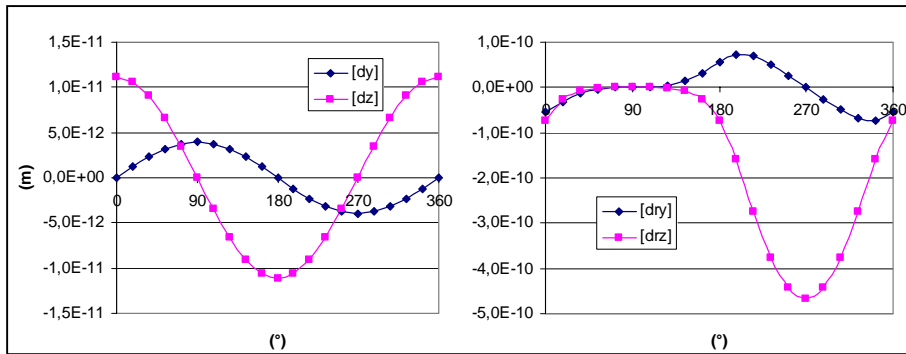
**Figure 2.** Relations cinématiques simplifiées utilisées pour la vérification des propriétés de découplage de efforts tranchants et des moments fléchissants

On présente ici un cas de chargement pour lequel la section fissurée est soumise à un moment de flexion et à un effort tranchant. Le chargement à l'extrémité de la poutre est de la forme :

$$\mathbf{F}(2L) = (T_x, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z) = (0, \sin\Phi, \cos\Phi, 0, 0, 0)$$

$$\text{Soit : } \mathbf{F}(L) = (T_x, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z) = (0, \sin\Phi, \cos\Phi, 0, -2 \cos\Phi, 2 \sin\Phi)$$

On obtient alors l'évolution des sauts de déplacement et de rotation suivante :



**Figure 3.** Comportement local de la section fissurée en fonction de  $\Phi$

On constate que les sauts de déplacement suivent une évolution sinusoïdale conformément à l'effort appliqué. **La linéarité de la réponse selon la direction de cisaillement est donc bien confirmée.** Pour les sauts de rotation, on retrouve précisément l'évolution qui avait été mise en évidence dans l'étude (Varé *et al.*, 2000). **L'indépendance des comportements selon l'effort tranchant d'une part et le cisaillement d'autre part est donc bien confirmée.**

Ces propriétés ne sont pas généralisables à toute géométrie de fissure. On peut néanmoins construire des critères portant sur les déplacements à l'extrémité de la poutre, qui permettent de vérifier leur validité *a posteriori* sur les solutions 3D. Ainsi, le découplage est rigoureusement vérifié lorsque les solutions élémentaires du problème unilatéral sous effort tranchant seul au droit de la fissure, c'est-à-dire :

$$u_y^T \text{ correspondant au torseur imposé en } x = 2L : \mathbf{F}^{u_y^T}(2L) = (0, 1, 0, 0, 0, -L)$$

$$u_z^T \text{ correspondant au torseur imposé en } x = 2L : \mathbf{F}^{u_z^T}(2L) = (0, 0, 1, 0, L, 0)$$

satisfont :

1.  $\mathbf{F}^{u_y^T}(2L) \cdot \mathbf{q}^{U_1}(2L) = 0$  et  $\mathbf{F}^{u_z^T}(2L) \cdot \mathbf{q}^{U_1}(2L) = 0$   
où  $\mathbf{q}^{U_1}(2L)$  solution du problème unilatéral pour  $\mathbf{F}^{U_1}(2L) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$
2.  $u_x^{u_y^T}(2L) = u_x^{u_z^T}(2L) = 0$  où  $u_x$  est la composante selon x

### 3. Expressions de l'énergie de déformation et loi de comportement associée

Les propriétés ci-dessus étant retenues, l'énergie de déformation de la section fissurée en fonction des efforts internes prend la forme suivante :

$$W^{\text{élément fissuré}}(T_y, T_z, M_y, M_z) = W(M_y, M_z) + \frac{1}{2} s_y T_y^2 + \frac{1}{2} s_z T_z^2 + s_{yz} T_y T_z \quad [2]$$

où  $W(M_y, M_z)$  est l'énergie de déformation exprimée dans (Varé *et al.*, 2000, Andrieux *et al.*, 2002).  $s_y$ ,  $s_z$  et  $s_{yz}$  sont les souplesses apportées par la fissure, identifiées à partir des calculs unitaires :  $W(1,0,0,0)$ ,  $W(0,1,0,0)$  et  $W(1,1,0,0)$ .

Pour disposer d'une relation en rigidité et non pas en souplesse, on calcule l'énergie de déformation en fonction des discontinuités  $w^d$ . Cette dernière est reliée à  $W$  par la relation de Legendre-Fenchel :

$$w^d([u], [\theta]) = \sup_{\mathbf{T}, \mathbf{M}} (\mathbf{T}[u] + \mathbf{M}[\theta] - W(\mathbf{T}, \mathbf{M})) \quad [3]$$

$$\text{où : } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_y \\ T_z \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_y \\ M_z \end{pmatrix}, [u] = \begin{pmatrix} [u_y] \\ [u_z] \end{pmatrix} \text{ et } [\theta] = \begin{pmatrix} [\theta_y] \\ [\theta_z] \end{pmatrix}$$

La fonction énergie en effort étant découplée,  $W(\mathbf{T}, \mathbf{M}) = W(\mathbf{T}, \mathbf{0}) + W(\mathbf{0}, \mathbf{M})$ , on montre que son expression en fonction des discontinuités l'est également :

$$w^d([u], [\theta]) = w^d([u], 0) + w^d(0, [\theta]) \quad [4]$$

La transformée  $w^d([u], 0)$  a été donnée dans (Varé *et al.*, 2000, et Andrieux *et al.*, 2002). Le terme associé à l'effort tranchant prend la forme classique :

$$w^d([u], 0) = \frac{1}{2} k_y [u_y]^2 + \frac{1}{2} k_z [u_z]^2 + k_{yz} [u_y] [u_z] \quad [5]$$

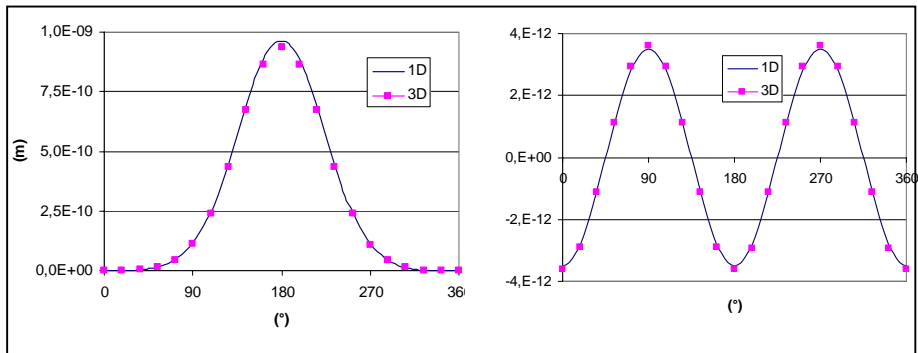
$$\text{où : } k_y = \frac{s_z}{s_y s_z - s_{yz}}, k_z = \frac{s_y}{s_y s_z - s_{yz}} \text{ et } k_{yz} = -\frac{s_{yz}}{s_y s_z - s_{yz}}$$

Finalement, la loi de comportement de la section fissurée est déterminée par dérivation de la fonction énergie. Soit, en reprenant l'expression en fonction des moments de flexion déterminée dans (Varé *et al.*, 2000) et (Andrieux *et al.*, 2002) :

$$\begin{pmatrix} M_y \\ M_z \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EI}{4L}k(\varphi) & -\frac{EI}{8L}k'(\varphi) & 0 & 0 \\ \frac{EI}{8L}k'(\varphi) & \frac{EI}{4L}k(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_y & k_{yz} \\ 0 & 0 & k_{yz} & k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_y \\ \theta_z \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad \text{où } \varphi = \text{Arc tan} \left( \frac{\theta_y}{\theta_z} \right) \quad [6]$$

#### 4. Mise en œuvre et validation

Les développements ci-dessus ont été implémentés dans le logiciel Cadyac (EDF) de calcul dynamique des rotors. Dans le cas du rotor présenté **Figure 1**, en rotation lente et soumis à un effort de direction et d'amplitude constantes en son extrémité, on obtient un excellent accord entre les résultats obtenus en modélisation 3D et 1D :



**Figure 4 gauche.** Comparaison 1D-3D – chargement en flexion et cisaillement

**Figure 4 droite.** Comparaison 1D-3D – chargement en cisaillement pur

#### 5. Bibliographie

- Andrieux S., Varé C., « A 3D cracked beam model with unilateral contact – Application to rotors », *European Journal of Mechanics, A/ Solids*, n°21, 2002, p. 793-810.
- Audebert S., Voinis Ph., « Comportement dynamique de rotors avec fissuration transverse : modélisation et validation expérimentale », *13<sup>ème</sup> colloque vibrations, chocs et bruits*.
- Bachschmid N., Pennacchi P., Tanzi E., Verrier P., Hasnaoui F., Aabadi K., « Crack detectability in vertical axis cooling pumps during operation », *International Journal of Rotating Machinery*, n°10, 2004, p. 121-133.
- Dimarogonas A.D., « Vibration of cracked structures : a state of the art review », *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 55, n°5, 1996, p. 831-857.

- El-Arem S., Andrieux S., Varé C., Verrier P., « Loi de comportement en flexion d'une section de poutre fissurée avec prise en compte des effets de cisaillement », *7<sup>ème</sup> colloque national en calcul de structure*, Giens, 2003.
- Gash R. « A survey of the dynamic behaviour of a simple rotating shaft with a transverse crack », *Revue of Sound and Vibration*, n°160, 1993, p. 313-332.
- Varé C., Andrieux S., « Modélisation d'une section de poutre fissurée – Application aux rotors de turbine », *Revue Française de Mécanique*, n°2000-2, p. 91-97.
- Wauer J., « On the dynamics of cracked rotors – A literature survey », *Applied Mechanics Review*, n°43, 1990, p. 13-17.