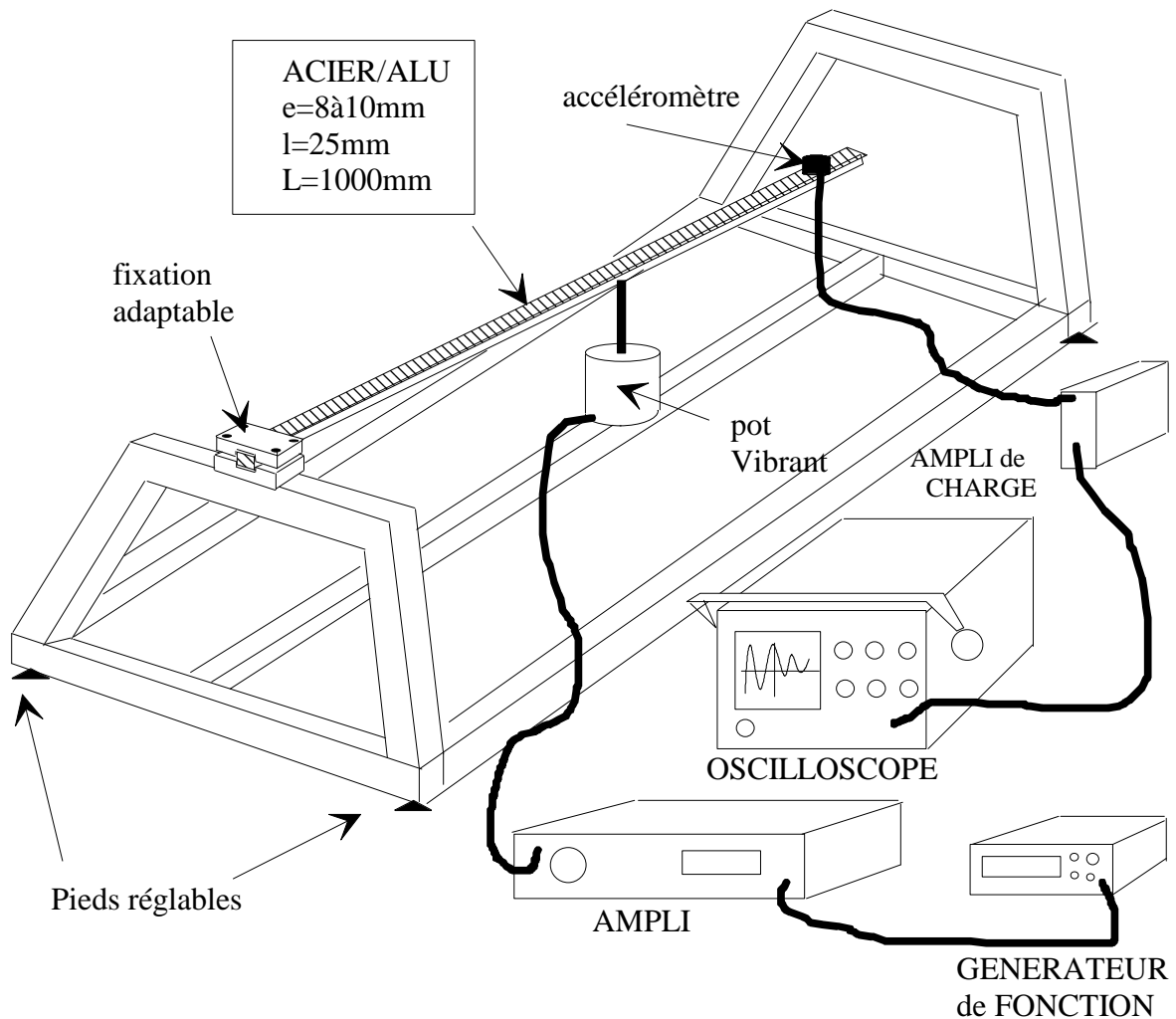


TP4. VIBRATION des POUTRES CONTINUES en FLEXION

I. PRESENTATION du BANC

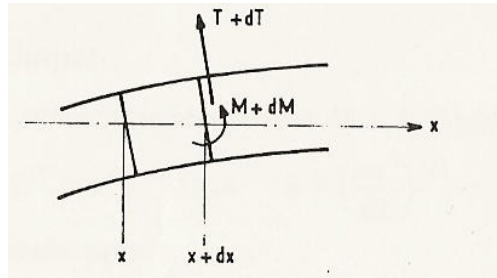
	Acier	Aluminium
module d'YOUNG	210 000 N/mm ²	73 000 N/mm ²
masse volumique	7 850 Kg/m ³	2 750 Kg/m ³
Dimensions de la section : e x l	8 mm x 25 mm	10 mm x 25 mm



II. THEORIE

1. Méthode directe (poutres continues en flexion)

Soit une poutre droite de longueur l et de section S (indépendante de l'abscisse x), constituée d'un matériau homogène de densité ρ et de module d'Young E , et qui subit une vibration.



En négligeant l'inertie de rotation et les effets du champ de gravité, on écrit par l'application des lois de la dynamique et de la statique sur une tranche de la poutre entre les sections x et $x+dx$:

$$\text{(Dynamique : } m\ddot{x} = \sum F \text{)} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \rho S dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = T - T - \frac{\partial T}{\partial x} dx \right. \quad (1)$$

$$\text{(RDS : } EIy'' = Mf \text{)} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M}{EI} \right. \quad (2)$$

$$\text{et} \quad T = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3)$$

avec :

$v(x)$: flèche de la poutre à l'abscisse x

$T(x)$: Effort tranchant

$M(x)$: Moment fléchissant

I : Inertie de la section ($bh^3/12$)

$$(1), (2) \text{ et } (3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0}$$

On cherche des solutions de la forme $v(x,t) = \phi(x)f(t)$ (séparation des variables)
Comme E et I ne dépendent pas de x

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) = EI f(t) \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Phi(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{EI}{\rho S} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} = - \frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \text{cste} = \omega^2$$

\Rightarrow les solutions recherchées sont de la forme

$$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad \text{et} \quad \Phi(x) = e^{rx}$$

$$\Rightarrow r^4 - \frac{\rho S \omega^2}{EI} = 0 \quad \Rightarrow r = \beta, -\beta, j\beta, -j\beta$$

$$\text{avec } \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}$$

$$\phi(x) = C \sin \beta x + D \cos \beta x + E \operatorname{Sh} \beta x + F \operatorname{Ch} \beta x$$

* **cas de la poutre encastree-libre**

1- Condition aux limites (déformée)

$$v(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad D + F = 0$$

$$\dot{v}(0,t) = \partial v / \partial x(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad C + E = 0$$

2- efforts internes : absence de moment et de l'effort tranchant à l'extrémité libre :

$$T(L)=0 = \frac{\partial M}{\partial x} = EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad \Rightarrow \quad -C \cos \beta L + D \sin \beta L + E \operatorname{Ch} \beta L + F \operatorname{Sh} \beta L = 0$$

$$M(L)=0 = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad -C \sin \beta L - D \cos \beta L + E \operatorname{Sh} \beta L + F \operatorname{Ch} \beta L = 0$$

$$\text{d'ou le système } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos \beta L & \sin \beta L & \operatorname{Ch} \beta L & \operatorname{Sh} \beta L \\ -\sin \beta L & -\cos \beta L & \operatorname{Sh} \beta L & \operatorname{Ch} \beta L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit Δ le déterminant du système :

$$\Delta = 2^*(1 + \cos \beta L \operatorname{Ch} \beta L)$$

Nous avons des solutions non nulles si $\Delta = 0 \Rightarrow 1 + \cos \beta L \operatorname{Ch} \beta L = 0$ (1)

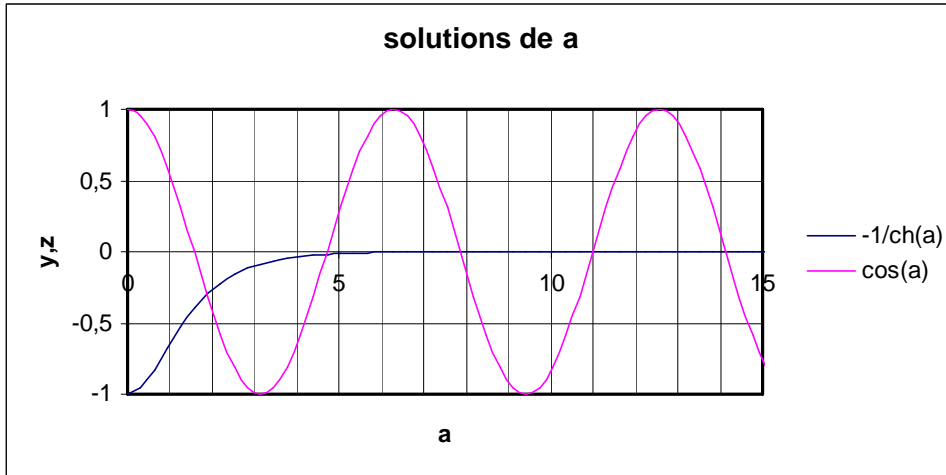
$$a_n \text{ solution de (1)} \Rightarrow (1 + \cos a_n \operatorname{Ch} a_n = 0)$$

$$\Rightarrow \beta_n = a_n / L$$

$$\frac{a_n^4}{L^4} = \frac{\rho S \omega_n^2}{EI} \Rightarrow \omega_n = \frac{a_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

Remarque :

- Pour retrouver les solutions a_n on détermine les points d'intersection entre $y = \cos(a_n)$ et $z = -1/\operatorname{Ch}(a_n)$.
- On constate la présence d'une infinité des solutions a_n , donc une infinité de pulsations propres et des déformées propres. Dans la réalité on n'en détecte qu'un nombre limité. On note ici que l'amortissement propre à chaque pulsation augmente avec la fréquence à tel point que la déformation associée disparaît.
- On appelle le mode correspondant à $n=1$ le mode fondamental de vibration.
- On note sur les modes d'ordre supérieur que le nombre de nœuds est égal à l'ordre du mode, le tableau suivant donne les cinq premiers modes qui sont facilement détectables par l'expérimentation.
- Le mode fondamental ($n=1$) est le plus facile à exciter.



n	a_n	mode de vibrations
1	1.875	
2	4.694	
3	7.855	
4	10.996	
5	14.137	

2. Méthode approchée

Recherche du mode propre fondamental par la méthode du quotient de RAYLEIGH

Soit $v(x, t) = u(x) q(t)$

A partir d'une hypothèse raisonnable sur les déplacements (fonctions admissibles) de la structure on calcule une expression de l'énergie cinétique et une expression de l'énergie potentielle.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l u^2(x) \dot{q}^2(t) dm \quad \text{avec } dm = \rho S dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M \dot{v}^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx$$

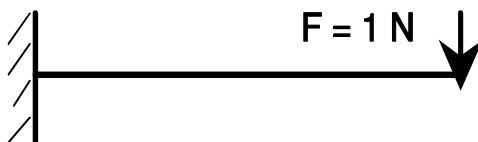
$$\text{soit} \quad \begin{cases} T = \left(\frac{1}{2} \int_0^l \rho S u^2(x) dx \right) \dot{q}^2(t) \\ U = \left(\frac{1}{2} \int_0^l EI u''^2(x) dx \right) q^2(t) \end{cases}$$

- démontrer que les équations de LAGRANGE donnent :

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\int_0^l EI u''^2(x) dx}{\int_0^l \rho S u^2(x) dx}$$

Application numérique

1. Calculer les 5 premières fréquences propres dans le cas d'une poutre en acier et en aluminium selon le cas (φ méthode directe), conclure.
2. Calculer le premier mode (mode fondamental) en prenant comme fonction admissible : $u(x)$ déformée sous une charge unité $F = 1 \text{ N}$ à l'extrémité libre. Ce choix est lié au fait que la déformée statique sous charge ponctuelle à l'extrémité est très voisine de la déformée de vibration libre (mode fondamental).



3. On ajoute une masse m (serre-joint + disque = 90 grammes) à l'extrémité de la poutre. Calculer de nouveau le 1^{er} mode (méthode de RAYLEIGH)

III MANIPULATION

Etude portée sur l'une des deux poutres. On excite la poutre en flexion par une excitation harmonique à fréquence réglable.

- Retrouver les 5 premiers modes propres de vibration (**avec** et **sans** masse à l'extrémité). Comparer avec les valeurs théoriques
- Pour chacun des modes propres relever la distance des nœuds de vibration (s'ils existent) au point d'encastrement. Comparer avec les valeurs théoriques
- Pour chacune des fréquences propres relever l'amplitude de l'accélération, calculer celui de déplacement. Conclure.

IV CONCLUSIONS

Conclure sur :

- Incidence de la masse m sur le comportement de la poutre.
- Incidence de l'ajout d'une grande masse $M \gg \rho \cdot s \cdot L$ sur la modélisation du système.